

מופשטת 3 תשע"ה - תרגיל 2

1. הוכח שהפולינום $p(x) = x^3 + 9x + 12 \in \mathbb{Q}[x]$ הוא אי-פריק. נניח θ הוא שורש של $p(x)$. חשב את ההופכי של $1 + \theta$ ב $\mathbb{Q}[\theta]$.
2. ראינו ש $x^3 + x + 1$ אי פריק ב $\mathbb{Z}_2[x]$. נניח θ הוא שורש של הפולינום. חשבו חזקות של θ ב $\mathbb{Z}_2[\theta]$.
3. הוכיחו כי אם α הוא שורש רציונלי של פולינום מונו/מתוקן מ $\mathbb{Z}[x]$ אז α הוא שלם.
4. יהי $K = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{7}]$ (זה שדה).
 - (א) חשבו את $[K : \mathbb{Q}]$.
 - (ב) מצאו בסיס ל K כמ"ו מעל \mathbb{Q} .
 - (ג) כתבו את $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2 + \sqrt[3]{7}}$ כצרוף לינארי של אברי הבסיס הנ"ל.
 - (ד) מצאו את הפולינום המינימלי של $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ מעל \mathbb{Q} והסיקו ש $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$.
 - (ה) מהו הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{7}$ מעל \mathbb{Q} ? ומהו מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$? (ודעו שאתם מבינים למה זה קורה).
5. חשב את המימד של $\mathbb{Q}[\sqrt{2} + \sqrt{3}]$ מעל \mathbb{Q} .