15.11.15

תורת הקבוצות
תרגול 4

הגדרה: יהיו α, β שני סודרים. $\alpha \cdot \beta = otp(\alpha \times \beta)$ עם הסדר המילוני "הפוך"

β עותקים של α

דוגמאות: כפל סודרים לא קומוטטיבי.

$2\cdot\omega \neq \omega\cdot 2$.

$2\cdot\omega$: $(0,0) \to (1,0) \to (0,1) \to (1,1) \to (0,2) \to \dots$

$\omega\cdot 2$:
$(0,0) \to (1,0) \to (2,0) \to (3,0) \to \dots$
$(0,1) \to (1,1) \to (2,1) \to (3,1) \to \dots$

נראה $\underset{\text{I}}{\omega\cdot 2 = \omega+\omega} \neq \underset{\text{II}}{\omega = 2\cdot\omega}$

(I) $\omega+\omega = otp(\omega\times\{0\} \cup \omega\times\{1\})$

אבל זה בדיוק $\omega\cdot 2$ ולכן $\omega+\omega = \omega\cdot 2$,
שוויון ממש

(II) נראה $2\cdot\omega = \omega$.

נבנה איזו' סדר מ- $2\cdot\omega$ ל- ω.

ע"י $(0,n) \mapsto 2n$ $(1,n) \mapsto 2n+1$.

נראה שעל ושומר סדר:

__על__ יהי $n\in\mathbb{N}$ אז אם n זוגי אז במקור $(0,\frac{n}{2})$ אחרת $(1,\frac{n-1}{2})$.

__שומר סדר__ $(x_1,y_1)<(x_2,y_2) \Leftarrow$

(I) $y_2>y_1 \Leftarrow$

$y_1 \to 2y_1,\ 2y_1+1 \qquad y_2 \to 2y_2,\ 2y_2+1$

מספיק לבדוק $2y_1+1<2y_2$

$y_1<y_2 \Leftarrow 2y_1<2y_2 \Leftarrow 2y_1+1\le 2y_2$

אבל לא יכול להיות שוויון כי בצד ימין זוגי ובצד שמאל אי-זוגי.

לכן $2y_1+1<2y_2$ כדרוש!

(II) $y_1=y_2$ $x_1<x_2$.

אז בהכרח $x_1=0$ $x_2=1$.

לכן $(0,y_1)<(1,y_2) \Leftarrow 2y_1<2y_1+1$ כדרוש!

הערה: למה $\omega \neq \omega+\omega$?

כי $\omega \in \omega+\omega$. ובפרט,

$0<\omega$ לכן $\omega+0 < \omega+\omega$.

תכונות (כפל):

1. $0\cdot\alpha = \alpha\cdot 0 = 0$
2. $1\cdot\alpha = \alpha\cdot 1 = \alpha$
3. אסוציאטיביות: $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$
4. אם $\alpha<\beta$, $\gamma\alpha<\gamma\beta$.

הוכחה:

1. $\alpha\cdot 0 = otp(\alpha\times\emptyset) = \emptyset$

וכנ"ל בצד שני.

2. $\alpha\cdot 1 = otp(\alpha\times\{1\}) = \alpha$

ע"י $(\beta,1) \mapsto \beta$, $\beta<\alpha$.

3. $(\alpha\beta)\cdot\gamma = otp((\alpha\beta)\times\gamma) =$

$= otp(otp(\alpha\times\beta)\times\gamma)$

$\alpha\cdot(\beta\gamma) = otp(\alpha\times(\beta\gamma)) = otp(\alpha\times otp(\beta\gamma))$

קיים איזו' סדר $f: \beta\times\gamma \to otp(\beta\times\gamma) = \beta\gamma$

$g: \alpha\times\beta \to otp(\alpha\times\beta) = \alpha\cdot\beta$

נרצה לבנות איזו' מ- $otp(\alpha\times\beta)\times\gamma$

ל- $\alpha\times otp(\beta\times\gamma)$. $h: otp(\alpha\times\beta)\times\gamma \to \alpha\times otp(\beta\times\gamma)$

ע"י $h(x,y) \to (g^{-1}(x), y) = (\underbrace{(a,b)}_{\in\alpha\times\beta}, y) \to$

$\to (a, \underbrace{(b,y)}_{\in\beta\times\gamma}) \to (a, f(b,y))$

בגלל הרכבה של שרשראות שהוא איזו'

מכאן $((a,b),y) \to (a,(b,y))$

ונראה שזה איזו' סדר. ברור שזה על ונותר שומר סדר.

$((a_2,b_2),c_2) > ((a_1,b_1),c_1)$

אז $(a_1,(b_1,c_1)) < (a_2,(b_2,c_2))$

(I) $c_1<c_2$ ואז $(b_1,c_1)<(b_2,c_2)$

ולכן $(a_1,(b_1,c_1))<(a_2,(b_2,c_2))$

(II) $c_1=c_2$, ~~[illegible]~~. ועוברים לרכיב השני.

כלומר $(a_1,b_1)<(a_2,b_2)$. וכאן יש מקרים!

(*) $b_1<b_2 \Leftarrow (b_1,c_1)<(b_2,c_2) \Leftarrow (a_1,(b_1,b_1))<(a_2,(b_2,c_2))$

(**) $b_1=b_2$ $\quad a_1<a_2$

$(a_1,(b_1,c_1))<(a_2,(b_2,c_2)) \Leftarrow (b_1,c_1)=(b_2,c_2) \Leftarrow$

סה"כ קיבלנו את הדרוש!

טענה: הוכחנו כי יש פילוג מימין כלומר $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

(4) נראה $\gamma\alpha<\gamma\beta$ עבור $\alpha<\beta$. $\gamma\neq 0$.

בשיעור הקודם הראנו שאם $\beta>\alpha$ אז $\beta=\alpha+\delta$ $(\delta>0)$

[והרצאה הנוכחית]

לכן $\gamma\beta=\gamma(\alpha+\delta)=\gamma\alpha+\gamma\delta$

גם $0<\gamma\delta$ כי $\delta\neq 0$, $\gamma\neq 0$ ולכן $\gamma\times\delta\neq\phi$

ולכן $otp(\gamma\times\delta)\neq\phi$ וכל סודר שאינו ϕ מכיל את ϕ כאיבר.

סה"כ $0<\gamma\delta$ ומכאן $\gamma\beta>\gamma\alpha$ כדרוש!

תרגיל! הוכח, יהא α סודר ו- F קבוצה לא ריקה של סודרים. אז $\alpha\sup F=\sup_{\gamma\in F}(\alpha\cdot\gamma)$. מ.ש.ל!

פתרון: $\sup F=\bigcup_{\gamma\in F}\gamma$ לכן $\alpha\sup F=otp(\alpha\times\bigcup_{\gamma\in F}\gamma)$

מצד שני $\sup_{\gamma\in F}\alpha\gamma=\bigcup_{\gamma\in F}otp(\alpha\times\gamma)$

נזכר בזהות מבדידה:

$$A\times\bigcup_{i\in I}C_i=\bigcup_{i\in I}(A\times C_i)$$

ונבנה איזו' סדר $h:\bigcup_{\gamma\in F}otp(\alpha\times\gamma)\to\alpha\times\bigcup_{\gamma\in F}\gamma$

לכל γ קיים איזו סדר $f_\gamma : otp(\alpha\times\gamma) \to \alpha\times\gamma$

תזכורת לבנות $f : \bigcup_{\gamma\in F} otp(\alpha\times\gamma) \to \bigcup_{\gamma\in F} \alpha\times\gamma$

באופן טבעי: $x\in otp(\alpha\times\gamma)$ אז $f(x) = f_\gamma(x)$

נראה ש- f מוגדרת היטב. כלומר אם $x\in otp(\alpha\times\gamma')$

אז $f_\gamma(x) = f_{\gamma'}(x)$ זה קורה כי אם $\gamma_1<\gamma_2$ אז

$f_{\gamma_2}|_{\gamma_1} = f_{\gamma_1}$. [כי $\gamma_1 \subseteq \gamma_2$ (בה"כ) תמיד!].

סה"כ מקבלים $f : \bigcup_{\gamma\in F} otp(\alpha\times\gamma) \to \bigcup_{\gamma\in F} \alpha\times\gamma$ איזו סדר.

מהגדרת מכפלה $\bigcup_{\gamma\in F} \alpha\times\gamma = \alpha\times\bigcup_{\gamma\in F}\gamma$

סה"כ f איזו מ- $\sup_{\gamma\in F}\alpha\gamma$ ל- $\alpha\cdot\sup F$.

כדרוש! (מ.ש.ל!)

תרגיל: הוכח/הפרך.

א. β עוקב $\Rightarrow$ $\alpha\beta$ עוקב.

ב. אם $\alpha<\beta$ אז קיים γ כך ש- $\beta=\alpha\cdot\gamma$.

פתרון: א. $\beta=1$, $\alpha=\omega$ $\Rightarrow$ $\alpha\beta=\omega$ לא עוקב.

ב. אפילו בטבעיים זה לא נכון.

מה שכן מוגדר זה חילוק סודרים עם שארית.

כלומר לכל $\alpha<\beta$ יש γ, δ, $\alpha>\delta$. כך ש-

δ,γ יחידים $\longrightarrow$ $\beta = \alpha\cdot\gamma+\delta$

לכן ניתן להגדיר גם "מודולו" = השארית בחלוקה.

תרגיל: חשב $(\omega+\omega+4) \bmod 7$

פתרון: $\omega+\omega+4 = 7\cdot(\omega+\omega)+4$

$7(\omega+\omega) = 7\omega+7\omega = \omega+\omega$

לכן התשובה היא 4.

חזקות סודרים

הגדרה: (רקורסיבית)

א. $\alpha^0=1$ ב. $\alpha^{\beta+1}=\alpha^\beta\cdot\alpha$

ג. אם β גבולי אז $\alpha^\beta=\sup\{\alpha^\gamma / \gamma<\beta\}$.

תרגיל: חשבו 2^ω

פתרון: $2^\omega=\sup\{2^n/n<\omega\}=\omega$

(אוסף טבעיים - ω).

בשביל לעבוד עם חזקות סודרים צריך להוכיח באינדוקציה. יש 2 גרסאות:

1. (I) נכונה ל-0 (II) אם נכונה ל-β אז גם ל-$\beta+1$
(III) אם β גבולי אז כאשר נכונה לכל $\gamma<\beta$ אז גם ל-β.

2. שלמה/סופית - כמו שהוגדר בהרצאה. * $\varphi(\omega)$

$$[\forall\gamma<\beta:\ \varphi(\gamma)]\Rightarrow\varphi(\beta)$$

תרגיל: הוכיחו שאם $\beta\geq 1$ אז $\beta\alpha\geq\alpha$.

פתרון: נוכיח באינדוקציה על α. [לא על α - כי הכפל מימין!].

בסיס: $\alpha=0$ $\Leftarrow$ ברור.

צעד (עוקב): $\beta(\alpha+1)=\underbrace{\beta\alpha}_{\geq\alpha}+\underbrace{\beta}_{\geq 1}\geq\alpha+1$

צעד (גבולי): נניח ש-α גבולי.

$$\beta\alpha=\beta\cdot\sup_{\gamma\in\alpha}\gamma\ \overset{?}{\underset{\text{טענה מהקורס}}{=}}\ \sup_{\gamma\in\alpha}\beta\cdot\gamma$$

לכל $\gamma\in\alpha$ $\beta\cdot\gamma\geq\gamma$ מהנחת האינדוקציה. לכן $\sup_{\gamma\in\alpha}\beta\cdot\gamma\geq\sup_{\gamma\in\alpha}\gamma=\alpha$

סה"כ $\beta\alpha\geq\alpha$ כנדרש!

מ.ש.ל!

תרגיל: הוכח $\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$ לכל α,β,γ.

פתרון: אינדוקציה על γ.

בסיס: $\gamma=0$ $\alpha^{\beta+0}=\alpha^\beta=\alpha^\beta\cdot 1=\alpha^\beta\cdot\alpha^0$.

צעד (עוקב): $\alpha^{\beta+\gamma+1}=\alpha^{\beta+\gamma}\cdot\alpha=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma\cdot\alpha=\alpha^\beta\alpha^{\gamma+1}$

צעד (גבולי): γ גבולי. $\xRightarrow{\text{ולכן}}$ $\gamma+\beta$ גבולי!

$$\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma = \alpha^\beta\cdot\sup_{\delta\in\gamma}\alpha^\delta = \sup_{\delta\in\gamma}\alpha^\beta\cdot\alpha^\delta =$$

$$= \underbrace{\sup_{\delta\in\gamma}\alpha^{\beta+\delta}}_{\text{מהנחת האינדוקציה}} = \underbrace{\alpha^{\beta+\gamma}}_{\gamma+\beta \text{ גבולי}}$$

מ.ש.ל!

תרגיל: נגדיר $a_0=\omega$, $a_n=\omega^{a_{n-1}}$

נסמן $\varepsilon=\sup\{a_n / n\in\omega\}$

הוכח $\omega^\varepsilon=\varepsilon$

פתרון: נראה a_n סדרה עולה.

כלומר אם $n<m$ אז $a_n<a_m$. מספיק $a_n<a_{n+1}$.

נראה $\omega^{a_{n-1}}<\omega^{a_n}$

ונוכיח באינדוקציה.

בסיס: $a_0<a_1$ כי $\omega<\omega^\omega$

כי $\omega>1$ ולכן $\omega=\omega^1<\omega^\omega$.

[השתמשנו בטענה: $\alpha<\beta \Rightarrow \mu^\alpha<\mu^\beta$].

צעד: נניח $a_{n-1}<a_n$. נוכיח $a_n<a_{n+1}$.

אכן $a_n=\omega^{a_{n-1}}<\omega^{a_n}=a_{n+1}$ כנדרש.

כעת נראה ε סודר גבולי. ונראה $a_n<\varepsilon$.

מהגדרת sup, $a_n\le\varepsilon$. $a_n\ne\varepsilon$ כי אחרת יש סודר שגדול מ-ε מתוך ה-a_n-ים. בסתירה.

$$\varepsilon=\sup\{a_n\}\le\sup\varepsilon\le\varepsilon \Rightarrow \varepsilon=\sup\varepsilon \Rightarrow$$ גבולי!

$a_n<\varepsilon \Rightarrow \{a_n\}\subseteq\varepsilon$

שאלה 1

[הבהרה: כל סודר שהוא ה-sup של קבוצת סודרים שכולם קטנים ממנו ממש אז הוא גבולי!]

(בכלל: גבול של סדרה עולה = גבולי!)

$\sup a_n=\varepsilon$

$$\omega^\varepsilon = \sup_{\gamma\in\varepsilon}\{\omega^\gamma\} = \sup\{\omega^{a_n}\} = \sup\{a_{n+1}\} = \varepsilon$$ מ.ש.ל!

כי $\{a_n\}$ שואפים ל-ε

כנדרש!

הערה: לסודר גבולי שווה $\alpha = \sup_{\beta\in F} F$

אז $\gamma^{\alpha} = \sup_{\beta\in F} \gamma^{\beta}$

טענה: ε הוא הקטן ביותר שמקיים זאת.

הוכחה: יהי $\beta<\varepsilon$ לכן קיים n כך ש- $\beta<\alpha_n$.

יש מקרים: (1) $\beta<\alpha_0$ לכן $\beta<\omega$

נראה $\omega^{\beta} \neq \beta$. $\beta \le \omega$

וגם $\beta \le \omega = \omega^1 < \omega^n < \omega^{\omega}$ $(1 < n\in\mathbb{N})$

סה"כ $\omega^{\beta} \geq \omega \geq \beta$ (עבור $\beta>1$).

אם $\beta=1$ אז $\omega^{\beta}=\omega>1$

ואם $\beta=0$ אז $\omega^0=1>0$.

סה"כ $\omega^{\beta}\neq\beta$.

(2) $\alpha_{n-1} < \beta \le \alpha_n$ נראה $\omega^{\beta}\neq\beta$.

$$\beta \le \alpha_n = \omega^{\alpha_{n-1}} < \omega^{\beta} \le \omega^{\alpha_n}$$

לכן $\omega^{\beta}\neq\beta$. כדרוש!

לכן ε הראשון. מש"ל!