פתרון תרגיל 11 אינפי 1

1. תהי f רציפה בכל נקודה בקטע (a,∞) כך ש- $\lim_{x\to\infty} f(x)=l\in\mathbb{R}$ וגם $\lim_{x\to a^+} f(x)=m\in\mathbb{R}$ (כלומר הגבולות הנ"ל קיימים וסופיים). הוכיחו ש- f רציפה במ"ש בקטע (a,∞).

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. מכיוון ש $\lim_{x\to\infty} f(x)=l$ קיים $M>0$ כך שלכל $x>M$ מתקיים $|f(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$ ולכן בפרט לכל $x_1,x_2\in[M,\infty)$ מתקיים

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-l+l-f(x_2)|\le|f(x_1)-l|+|l-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

ללא תלות במרחק בין x_1,x_2 כלל.

כפי שראינו בכיתה, ניתן להשלים את f לפונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,M+1]$ ולכן היא רציפה שם במ"ש, ולכן קיים $\delta>0$ (וניתן גם לבחור $0<\delta<1$) כך שלכל $x_1,x_2\in(a,M+1]$ המקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

ביחד לכל $|x_1-x_2|<\delta<1$, $x_1,x_2\in(a,\infty)$, מתקיים $x_1,x_2\in(a,M+1]$ או $x_1,x_2\in[M,\infty)$ ולכן $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ ולכן הפונקציה רציפה במ"ש.

2. תהי פונקציה f המקיימת את התנאי הבא: קיים $k>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in A$ מתקיים $|f(x_1)-f(x_2)|\le k|x_1-x_2|$ (זה נקרא תנאי ליפשיץ).
הוכיחו/הפריכו: f רציפה במ"ש ב- A.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ ניקח $\delta=\frac{\varepsilon}{k}$ אזי אם $|x_1-x_2|<\delta$ מתקיים

$|f(x_1)-f(x_2)|\le k|x_1-x_2|<k\delta=k\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon$ מש"ל.

3. הוכיחו על פי ההגדרה שהפונקציה הבאה רציפה במ"ש בקטע $[-4,3]$:
$f(x)=x^3+x$.

פתרון: יהי $\varepsilon>0$. יהיו $x,y\in[-4,3]$.

$$|f(x)-f(y)|=|x^3+x-y^3-y|=|x-y|\cdot|x^2+y^2+xy+1|\le$$
$$\le|x-y|\cdot\left(x^2+y^2+|x|\cdot|y|+1\right)\le|x-y|\cdot(16+16+16+1)\le 49\cdot|x-y|$$

כעת נבחר, $\delta=\dfrac{\varepsilon}{49}$.

4. קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש בקטעים הנתונים:

a. $\sin e^x$ בקטע $(0,\infty)$

לא: נמצא שתי סדרות מתאימות על מנת להראות שפונקציה זו אינה רציפה במ"ש.

$x_n=\ln\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ ו $y_n=\ln\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$. קל לראות ש

$$|x_n-y_n|=\ln\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)-\ln\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)=\ln(1)=0$$

כמו כן, $|f(x_n)-f(y_n)|=|1-(-1)|=2$

b. $\dfrac{\sin(\sin x)}{\cos(\cos x)}$ בקטע $(-\infty,\infty)$

כן: נסמן $f(x)=\dfrac{\sin(\sin x)}{\cos(\cos x)}$. קל לראות ש

$$\forall x:\frac{\sin(\sin x)}{\cos(\cos x)}=f(x)=f(x+2\pi)=\frac{\sin(\sin(x+2\pi))}{\cos(\cos(x+2\pi))}$$

כלומר זו פונקציה מחזורית על כל הממשיים. כמו כן, $-\frac{\pi}{2}<-1\le\cos x\le 1<\frac{\pi}{2}$ וגם

$\cos(x)>0$ עבור $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ולכן סה"כ $\cos(\cos x)>0$ ובפרט $\cos(\cos x)\ne 0$.

זו מנה של פונקציה רציפות, המכנה שונה מאפס, ולכן סה"כ זו פונקציה רציפה.

פונקציה מחזורית ורציפה על כל הממשיים הינה רציפה במ"ש.

c. $\ln x$ בקטע $(0,\infty)$

לא: $\ln x$ אינה חסומה בקטע הסופי $(0,1)$ מכיוון ש $\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ ולכן אינה רציפה שם במ"ש ובוודאי לא בקטע כולו.

d. $\ln\left(\ln\left(e^{e^x}\right)\right)$ בקטע $(-\infty,\infty)$

כן: $\ln\left(\ln(e^{e^x})\right)=\ln\left(e^x\right)=x$ וזו פונקציה ידועה כרציפה במ"ש

e. $\sin\sqrt{(x+2\pi)}$ בקטע $(0,\infty)$

כן: $x+2\pi$ רציפה במ"ש ובתחום הנ"ל $x+2\pi>0$. $\sqrt{x}$ רציפה במ"ש עבור $x>0$ ו- $\sin x$ רציפה במ"ש על כל הממשיים. לכן סה"כ זו הרכבה של רציפות במ"ש ולכן רציפה במ"ש.

f. $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$ בקטע מהצורה $(\pi k,\pi k+\pi)$ עבור k שלם

כן: בתוך קטע מהצורה הזו הפונקציה רציפה, וראינו בתרגיל קודם שבקצות הקטע לפונקציה יש גבול. לכן סה"כ היא היא רציפה במ"ש בקטע.

g. $\ln\left|1-\sin\frac{1}{x}\right|$ בקטע $[0.1,\infty)$

לא: אמנם לפונקציה יש גבולות בקצות הקטע, אבל היא לא מוגדרת בנקודה $x=\frac{2}{\pi}>0.1$ שנמצאת בקטע לכן בוודאי אינה רציפה שם במ"ש.

5. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה במ"ש בכל קטע $[n,n+1]$ עבור $n\in\mathbb{N}$ אזי f רציפה במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

הפרכה: למשל: $f(x)=x^2$. ראינו שפונקציה זו לא רציפה במ"ש בכל הישר הממשי, אבל היא כן רציפה במ"ש בכל קטע סגור (לפי קנטור).

ב. אם g,f רציפות במ"ש בקטע I אזי גם $f+g$ רציפה במ"ש בקטע I.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$.

f רבמ"ש ולכן קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $x,y\in I$ המקיימים $|x-y|<\delta_1$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

g רבמ"ש ולכן קיים $\delta_2>0$ כך שלכל $x,y\in I$ המקיימים $|x-y|<\delta_2$ מתקיים $|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

כעת, עבור $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ שני אי השוויונים מתקיימים ולכן:

$$|(f+g)(x)-(f+g)(y)|=|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)|\le$$
$$\le|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|<\varepsilon$$

ג. אם g,f רציפות במ"ש בקטע I אזי גם $f\cdot g$ רציפה במ"ש בקטע I.

הפרכה: ניקח $f(x)=g(x)=x$. כל אחת מהן רבמ"ש, אבל $(f\cdot g)(x)=x^2$ לא רבמ"ש.

6. הוכיחו את הטענה הבאה: יהיו f,g רציפות במ"ש וחסומות ב-$\mathbb{R}$. הוכיחו כי $f\cdot g$ רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$.

הוכחה: f,g חסומות ולכן קיימים $M,K>0$ כך ש-

$|f(x)|\le M,\ |g(x)|\le K,$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

על מנת להוכיח ש-$f\cdot g$ רבמ"ש: יהי $\varepsilon>0$ צריך להראות שקיים $\delta>0$ כך שאם $|x-y|<\delta$ אזי $|(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(y)|<\varepsilon$.

לפי הנתון ש-f רבמ"ש: קיים $\delta_1>0$ כך שאם $|x-y|<\delta_1$ אזי $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2M}$.

לפי הנתון ש- g רבמ"ש: קיים $\delta_2 > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta_2$ אזי $|g(x)-g(y)| < \frac{\varepsilon}{2K}$.

כעת, מתקיים:

$$\begin{aligned}
&|(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(y)| = |f(x)g(x)-f(y)g(y)| = \\
&= |f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)| \le \\
&\le |f(x)g(x)-f(x)g(y)| + |f(x)g(y)-f(y)g(y)| = \\
&= |f(x)||g(x)-g(y)| + |g(y)||f(x)-f(y)| < M\cdot\frac{\varepsilon}{2M} + K\cdot\frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon
\end{aligned}$$

איזו דלתא נבחר? $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

שימו לב שזאת ההוכחה הישירה, ולפני זה מומלץ מאוד לעשות טיוטה, אחרת לא ממש רואים איזה אפסילון יש לבחור בכל הגדרה.

7. יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפות במ"ש. הוכיחו כי $f\circ g$ (הרכבה) רציפה במ"ש.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$.

נתון ש- f רבמ"ש, לכן קיים $\delta > 0$ כך שאם (*) $|x-y| < \delta$ אזי $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

נתון ש- g רבמ"ש ולכן לכל $\varepsilon_1 > 0$, ובפרט עבור $\varepsilon_1 = \delta$ קיים $\alpha > 0$ כך שאם $|x-y| < \alpha$ אזי $|g(x)-g(y)| < \delta$.

ובגלל ש- $g(x)$ מקיים את תנאי (*) אז נקבל: $|f(g(x))-f(g(y))| < \varepsilon$.