תרגול 2 – חדוו"א 1 לביולוגיה חישובית

נושא השיעור: סדרות

הגדרה

סדרה של מספרים ממשיים היא פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. לכל $n\in\mathbb{N}$ מותאם מספר ממשי $a_n=f(n)$ שנקרא האיבר ה n-י של הסדרה.

סדרה היא למעשה רשימה אינסופית מסודרת של מספרים ממשיים: $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$.

סימון: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

דוגמאות

1. הסדרה $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n},...$ כאשר $a_n=\frac{1}{n}$ נקראת הסדרה ההרמונית.
2. לכל $n\in\mathbb{N}$ $a_n=3$ סדרה קבועה.

הגדרה – סדרה חשבונית

סדרה של מספרים שבה ההפרש בין כל איבר לקודמו הוא גודל קבוע נקראת סדרה חשבונית.

דוגמא

סדרה בדוגמא 3 היא סדרה חשבונית והפרש הסדרה הוא 6.

סימון: נהוג לסמן את הפרש הסדרה באות d.

איבר כללי של סדרה חשבונית

נניח שהסדרה $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ היא סדרה חשבונית שהפרשה הוא d אז ניתן לרשום את הסדרה באופן הבא: $a_1,a_1+d,a_1+2d,a_1+3d...,a_1+(n-1)d,...$ ולכן האיבר הכללי בסדרה חשבונית הוא $a_n=a_1+(n-1)d$.

דוגמא

נחשב את האיבר הכללי של הסדרה החשבונית $11,9,7,5...$. הפרש הסדרה הוא $d=-2$ והאיבר הראשון הוא $a_1=11$ ולכן האיבר הכללי הוא $a_n=11+(n-1)\cdot(-2)\Rightarrow a_n=13-2n$.

סכום סדרה חשבונית

נתונה סדרה חשבונית $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ נרצה לחשב את סכום n האיברים הראשונים בסדרה.

ז"א $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ בחיבור הסדר לא משנה ולכן

$a_1+a_2+a_3+...+a_n=(a_1+a_n)+(a_1+a_{n-1})+...$ נשים לב שיש $\frac{n}{2}$ זוגות בעלי גודל קבוע (אם n אי זוגי אז $a_1+a_n=\frac{a_{\frac{n-1}{2}}}{2}$) סה"כ נקבל שסכום הסדרה הוא $\frac{n}{2}(a_1+a_n)$ נסמן את הסכום של n איברים בסדרה ע"י S_n. ראינו ש $a_n=a_1+(n-1)d$ ולכן $S_n=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$.

הגדרה – סדרה הנדסית

סדרה של מספרים שבה המנה בין כל איבר לקודמו היא גודל קבוע נקראת סדרה הנדסית.

דוגמא

$16,4,1,...$ מנת הסדרה היא רבע

סימון: נהוג לסמן את מנת הסדרה באות q.

איבר כללי של סדרה הנדסית

נניח שהסדרה $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ היא סדרה הנדסית שמנתה הוא q אז ניתן לרשום את הסדרה באופן הבא: $a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3 ..., a_1q^{n-1}, ...$ ולכן האיבר הכללי בסדרה חשבונית הוא $a_n = a_1q^{n-1}$.

<u>דוגמא</u>

נחשב את האיבר הכללי של הסדרה ההנדסית $1,2,4,8...$. מנת הסדרה היא $q = 2$ והאיבר הראשון הוא $a_1 = 1$ ולכן האיבר הכללי הוא $a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

<u>סכום סדרה הנדסית</u>

נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ נרצה לחשב את סכום n האיברים הראשונים בסדרה.

ז"א

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \Rightarrow S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} \Rightarrow$$
$$S_n(1-q) = \left(a_1 + a_1q + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1}\right)(1-q) = a_1 - a_1q^n$$
$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

<u>הגדרה</u>

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה אם קיים מספר M כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \le M$. כל מספר M כזה נקרא חסם מלעיל של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>דוגמא</u>

הסדרה $\{7-2^n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה ע"י $M = 7$. שימו לב: יש איסוף חסמי מלעיל לסדרה אך מתוך קבוצת כל החסמים יש רק אחד שהוא הקטן ביותר.

<u>הגדרה</u>

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמטה אם קיים מספר m כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \ge m$. כל מספר m כזה נקרא חסם מלרע של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>דוגמא</u>

הסדרה $\{n^5 - n + 8\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמטה ע"י $m = 8$, אך הסדרה אינה חסומה מלמעלה.

<u>הגדרה</u>

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה אם היא חסומה מלמעלה וחסומה מלמטה.

באופן שקול: הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה אם קיים מספר M כזה שלכל $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le M$.

<u>דוגמא</u>

הסדרה $\left\{\frac{2n-1}{3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה. היא חסומה מלמטה ע"י $m = 0$ ומלמעלה ע"י $M = \frac{2}{3}$ מכיוון שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_n = \frac{2n-1}{3n} \le \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3}$.

<u>הגדרה</u>

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נקראת מונוטונית עולה אם קיים n_0 כך שלכל $n \ge n_0$, $a_n \le a_{n+1}$. נאמר שהסדרה היא מונוטונית עולה ממש אם לכל $n \ge n_0$, $a_n < a_{n+1}$.

הסדרה היא מונוטונית יורדת אם קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $a_n \geq a_{n+1}$. נאמר שהסדרה היא מונוטונית יורדת ממש אם לכל $n \geq n_0$, $a_n > a_{n+1}$.

נאמר שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מונוטונית אם היא מונוטונית עולה או מונוטונית יורדת.

<u>הערה</u>

כדי להוכיח שסדרה מונוטונית עולה יש להראות ש קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$, $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

אם הסדרה חיובית אז יש להראות ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

באותו אופן ניתן להראות מונוטונית יורדת.

<u>תרגיל</u>

הוכח שהסדרה $n^2 + n$ עולה.

<u>פתרון</u>

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + n + 1 - n^2 - n = 2n + 2 \geq 0$$

<u>תרגיל</u>

הוכח שהסדרה $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת.

<u>פתרון</u>

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

<u>תרגיל</u>

הוכח שהסדרה $\frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 4^n$.

<u>פתרון</u>

נשים לב ש

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left[(n+1)!\right]^2 \cdot 4^{n+1}}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 \cdot 4^n} = \frac{(n!)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot 4^n \cdot 4 \cdot (2n)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2) \cdot (n!)^2 \cdot 4^n} = \frac{4n+4}{4n+1} > 1$$

<u>הערה</u>

נניח שיש פונקציה גזירה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n) = f(x)$ וקיים n_0 כשלכל $x \geq n_0$ מתקיים $f'(x) \geq 0$ אז הסדרה מונוטונית עולה.

<u>דוגמא</u>

הוכח שהסדרה $a_n = \arctan n$ מונוטונית עולה.

<u>הוכחה</u>

$f(x) = \arctan x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ולכן $f'(x) \geq 0$ ואז הסדרה מונוטונית עולה.

<u>הגדרה</u>

תהיי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה נתונה. נאמר שהמספר L היא גבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים מספר טבעי n_0 כל שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

אם לסדרה יש גבול אזי נאמר כי הסדרה מתכנסת ונסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

אם לסדרה אין גבול אז נאמר שהסדרה מתבדרת.

<u>תרגיל</u>

הוכח לפי ההגדרה כי $\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1$.

<u>פתרון</u>

לכל $\varepsilon>0$ נבחר $n_0=\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil+1$ ואז לכל $n\geq n_0$ נקבל ש

$$\left|a_n-1\right|=\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n_0}=\frac{1}{\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil+1}<\frac{1}{\left\lceil\frac{1}{\varepsilon}\right\rceil}\leq\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon.$$