

פתרון הבוחן

26 ביולי 2018

1. (א) ראשית, נבדוק שהטענה נכונה עבור $n = 1, 2$:

$$-1 = a_1 = 1^2 - 2 \cdot 1, \quad 0 = a_2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \quad \checkmark$$

כעת, נניח שהטענה נכונה לכל $n \leq k$, כלומר: $a_n = n^2 - 2n$, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$. כלומר, נוכיח: $a_{k+1} = (k+1)^2 - 2(k+1)$.
אם כן, לפי נוסחת הנסיגה:

$$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} + 2 =$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$= 2(k^2 - 2k) - (k-1)^2 + 2(k-1) + 2 =$$

מפה זה רק לפתוח סוגריים וכאלה:

$$= 2k^2 - 4k - k^2 + 2k - 1 + 2k - 2 + 2 = k^2 + 2k + 1 - 2k - 2 = (k+1)^2 - 2(k+1)$$

כ נ ד ר ש.

(ב) הטענה נכונה, נוכיח באמצעות הכלה דו־כיוונית:

$$\begin{aligned} (a, b) \in A \times (B \cup C) & \\ \updownarrow & \\ a \in A \wedge b \in B \cup C & \\ \updownarrow & \\ a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C) & \\ \updownarrow & \\ (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C) & \\ \updownarrow & \\ (a, b) \in A \times B \vee (a, b) \in A \times C & \\ \updownarrow & \\ (a, b) \in (A \times B) \vee (A \times C) & \end{aligned}$$

המעבר הראשון נובע מהגדרת מכפלה קרטזית, השני מהגדרת איחוד, השלישי מחוק הפילוג, הרביעי מהגדרת מכפלה קרטזית והחמישי מהגדרת איחוד.

2. (א) נראה כי: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\}$. בשלב ראשון נוכיח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $B_n = \{x \in \mathbb{N} | 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1\}$.

$$x \in B_n = A_{n+1} \setminus A_n \iff x \in A_{n+1} \wedge x \notin A_n \iff$$

$$\iff (2 \leq x \leq 3n + 1) \wedge \neg(2 \leq x \leq 3n - 2) \iff 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1$$

כלומר: $x \in B_n \iff x \in \{x \in \mathbb{N} | 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1\}$ ולכן מתקיים שיוויון.

כעת, נוכיח כי $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} | 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1\} = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\}$ הכלה דו כיוונית:

יהי $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\}$ נוכיח כי הוא באיחוד:

x הוא מספר טבעי גדול מ-2, לכן יש 3 מקרים: אם x מתחלק ב-3, אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x = 3n$ ולכן $x \in B_n$ כלומר $3n - 1 \leq x \leq 3n + 1$ ולכן x באיחוד.

אם $x - 1$ מתחלק ב-3, כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x - 1 = 3n$ כלומר $x = 3n + 1$ ולכן $3n - 1 \leq x \leq 3n + 1$ כלומר $x \in B_n$ ולכן x באיחוד.

אם $x + 1$ מתחלק ב-3, כלומר קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $x + 1 = 3n$ כלומר $x = 3n - 1$ ולכן $3n - 1 \leq x \leq 3n + 1$ כלומר $x \in B_n$ ולכן x באיחוד.

ובכל אופן מצאנו כי $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

נניח כעת כי $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} | 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1\}$ ונוכיח כי $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\}$.

$$x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{N} | 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1\} \implies \exists n \in \mathbb{N} : 3n - 1 \leq x \leq 3n + 1$$

כיון ש $n \geq 1$ נקבל $3n - 1 \geq 2$ ולכן $x \geq 2$ כלומר $x \in \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\}$ וסיימנו.

(ב) ניקח בתור הקבוצה האוניברסלית שלנו את \mathbb{N} . אזי :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N} \setminus B_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n^c = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)^c = (\{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x\})^c = \{1\}$$

3. (א) אם בקבוצה A יש שני איברים שונים a, b , R_1 לא יחס שקילות משום שאינו

טרנזיטיבי: לדוגמא: $(a, a) R_1 (a, b) \wedge (a, b) R_1 (b, b)$ אבל לא מתקיים $(a, a) R_1 (b, b)$.

אם $A = \{a\}$, $A \times A = \{(a, a)\}$ והיחס R_1 יחס שקילות. חשבו מה קורה אם

הקבוצה ריקה.

בכל מקרה, R_2 הוא יחס שקילות. הוכחה:

רפלקסיביות: $\forall (a, b) \in A \times A, a = a$ ולכן $(a, b) R_2 (a, b)$.

סימטריות: יהיו $(a, b), (c, d) \in A \times A$ כך ש- $(a, b) R_2 (c, d)$. אזי: $a = c$.
לכן $c = a$, ונקבל ש- $(c, d) R_2 (a, b)$.

טרנזיטיביות: יהיו $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times A$ כך ש- $(a, b) R_2 (c, d) \wedge (c, d) R_2 (e, f)$. אזי $a = c \wedge c = e$. לכן $a = e$. מהגדרת היחס נקבל:
 $(a, b) R_2 (e, f)$.

(ב) נוכיח: $|A \times A / R_2| = n$.

אם $|A| = 0$ זה אומר ש- A קבוצה ריקה, ולכן גם $A \times A$ קבוצה ריקה. בפרט,
 $|A \times A / R_2| = 0$.

כעת, נניח ש- $A \neq \emptyset$. יהי $x \in A$. ראשית, נראה שלכל $a \neq b \in A$, $[(a, x)]_{R_2} \neq [(b, x)]_{R_2}$. זה שקול להוכיח ש- (a, x) לא מתייחס ל- (b, x) (משום שהוכחתם בהרצאה ששני איברים שקולים אמ"ם יש להם את אותה מחלקת שקילות). אבל זה ברור מהגדרת היחס. לכן מצאנו n מחלקות שקילות שונות. כעת, נוכיח שאלו כולם. יהי $(a, b) \in A \times A$. מהגדרת היחס $(a, b) R_2 (a, x)$ ולכן $[(a, b)]_{R_2} = [(a, x)]_{R_2}$. לסיכום, $|A \times A / R_2| = |\{(a, x)]_{R_2} : \forall a \in A\}| = |A| = n$.

במקרה שבו R_1 יחס שקילות, יש בקבוצה $A \times A$ רק איבר אחד, ולכן בקבוצת המנה יש רק איבר אחד: $|A \times A / R_1| = 1$.