אינפי 1 - תרגיל 6

1. הוכח/הפרך:
   a. אם הטור $\sum b_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum \frac{1}{b_n}$ מתבדר
   b. אם הטור החיובי $\sum a_n$ מתבדר, אזי $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ גם מתבדר
   c. אם הטור החיובי $\sum a_n$ מתכנס, אזי גם $\sum {a_n}^2$ מתכנס
2. תהיי הסדרה החשבונית $a_{n+1} = a_n + d$. לאילו ערכים של a_1 ו d הטור $\sum a_n$ מתכנס?
3. חשב את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n}$
4. חשב את סכומי הטורים:
   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
   b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+5n+6}$
   c. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$ רמז: זכרו ש $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$, ודעו שאם $a_n \to 1$ אזי $\ln a_n \to 0$.

5. קבע האם הטורים הבאים מתכנסים או לא (והוכח):
   a. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$
   b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 3)^n}$
   c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{n!}$
   d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$
   e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n(n+1)}$
   f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+1}$
   g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^n}$ עבור $a > 0$ קבוע.
   h. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

6. הוכח:

a. אם $\sum |a_n|$ מתכנס אזי $\sum a_n$ מתכנס (רמז: תנאי קושי לסדרות)

b. אם הטורים $\sum {a_n}^2$ ו $\sum {b_n}^2$ מתכנסים אזי הטור $\sum a_n b_n$ מתכנס (רמז: הראה קודם ש $\sum |a_n b_n|$ מתכנס)

c. אם הטור $\sum {a_n}^2$ מתכנס, אזי הטור $\sum \frac{|a_n|}{n}$ מתכנס

d. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס אם"ם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס לכל סדרה חסומה b_n [ממבחן של פרופסור זלצמן)] (רמז: סעיף א')