

תרגול 13

9 בינואר 2014

תזכורת: A מטריצה $f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ הפולינום האופני שלה. $Av = \lambda v$, $v \neq 0$ ו"ע, λ ע"ע.

ר"ג של λ_0 הוא $\dim[N(A - \lambda_0 I)]$, ר"א = המעלה המקסימלית של $\lambda - \lambda_0$. מתקיים ר"א \leq ר"ג

תרגיל: יהיו A, B שתי מטריצות הוכח: ע"ע של BA שווים לע"ע של AB .

הוכחה: תרגיל (פצל למקרים אם $\lambda = 0$ ואם $\lambda \neq 0$)

אם $\lambda = 0$ ע"ע עצמי של BA אזי BA לא הפיכה ואז AB לא הפיכה ואז $\lambda = 0$ ע"ע גם של AB

אם $\lambda \neq 0$ אזי כיוון שהוא ע"ע של BA קיים $v \neq 0$ ש $BAv = \lambda v$ ואז $(AB)Av = A(BAv) = A\lambda v = \lambda Av$

כלומר Av (שונה מאפס-למה?) ו"ע של AB עם אותו ע"ע.

תרגיל: תהא A מטריצה יהיו $v_1 \dots v_k$ ו"ע המתאימים לע"ע λ אז גם צ"ל שלהם (שלא מתאפס) הוא ו"ע של אותו ע"ע

הוכחה: יהא $w = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i$ צ"ל שלהם אזי $Aw = A(\sum_{i=1}^k \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^k \alpha_i Av_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda v_i = \lambda w$

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \lambda v_i = \lambda \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = \lambda w$$

משפט: תהא A מטריצה עם $\lambda_1 \dots \lambda_m$ ע"ע שונים, v_1, \dots, v_m ו"ע עצמיים מתאימים אזי $\{v_1, \dots, v_m\}$ בת"ל

הגדרה: בסימונים לעיל המרחב העצמי של λ הוא $V_\lambda = N(A - \lambda I)$

הערה: $V_\lambda = \{v | Av = \lambda \cdot v, v \text{ eigenvector}\} \cup \{0\}$

הערה: בסימונים האלה, מהמשפט נובע כי $V_{\lambda_i} \cap V_{\lambda_j} = \{0\}$ לכל $i \neq j$

ליכסון

הגדרה: A תקרא לכסינה אם A דומה למטריצה אלכסונית (כלומר קיים P הפיכה כך ש

$$P^{-1}AP = D \text{ (אלכסונית)}$$

דוגמא: $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ ראינו כי $\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1\}$ ע"ע

ו $\{v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ו"ע בהתאמה.

נגדיר $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ כעת:

$$P^{-1}AP = P^{-1}A(v_1, v_2) = P^{-1}(Av_1, Av_2)$$

$$\begin{aligned}
&= P^{-1}(\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = P^{-1}(v_1, v_2) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
&= P^{-1} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כלומר A לכסינה.

משפט (מהרצאה): $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה \Leftrightarrow יש בסיס של ו"ע ל \mathbb{F}^n (\Leftrightarrow הריבוי הג"א = ר"א לכל ע"ע + לפולינום האופיני יש n שורשים .)

הוכחה: (\Leftarrow) נתון A לכסינה קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\text{נסמן } P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \text{ אזי}$$

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = AP = PD = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

כלומר לכל i מתקיים $Av_i = \lambda_i v_i$ כלומר v_i ע"ע וכיוון ש P הפיכה הם בת"ל (ובפרט $v_i \neq 0$ לכל i) ולכן בסיס ל \mathbb{F}^n

(\Rightarrow) יש בסיס $\{v_1 \dots v_n\}$ של ו"ע כלומר לכל i מתקיים $Av_i = \lambda_i v_i$.

$$\text{נגדיר } P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= P^{-1} \begin{pmatrix} | & | & | \\ Av_1 & \cdots & Av_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda_1 v_1 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & | & | \end{pmatrix} \\
&= P^{-1} P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

תרגיל: קבע האם $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ לכסינה כאשר:

1. $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מטריצה ממשית.

פתרון: $f_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$ כיוון של f_A אין שורשים בממשים בפרט אין ל A ו"ע ולכן A אינה לכסינה.

2. $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ מטריצה מרוכבת.

פתרון: $f_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$ השורשים הם $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ נמצא ו"ע.

עבור $\lambda_1 = i$ נפתור $N\left(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ולכן $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ ו"ע.

עבור $\lambda_2 = -i$ נפתור $N\left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ולכן $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ ו"ע.

קל לראות ש $\{v_1, v_2\}$ בת"ל ולכן לפי השלישי חינם בסיס ל \mathbb{C}^2 ולכן A לכסינה.

תרגיל: האם כל מטריצה $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ לכסינה?
 פתרון: לא! למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. $f_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} \right| = (\lambda - 1)^2$.
 $\lambda = 1$ ע"ע יחיד.
 ו"ע: $N\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ ולכן $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו"ע יחיד בפרט אין בסיס של ו"ע ל \mathbb{C}^2 ולכן A אינה לכסינה.
 תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה. יהיו $\lambda_1 \dots \lambda_n$ הע"ע שלה. הוכח $|A| = \prod_{k=1}^n \lambda_k$ (כלומר הדטרמיננטה שווה למכפלה הע"ע)
 פתרון: תרגיל (העזר בטענה משיעור קודם כי למטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה)

תרגיל: תהא $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ חשב את A^{2013} .
 פתרון: ראינו כי $\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1\}$ ע"ע
 ו $\{v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ו"ע בהתאמה.
 נגדיר $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
 ויתקיים $A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1}$ או לחילופין $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 כעת

$$\begin{aligned} A^{2013} &= \left(P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^{2013} \\ &= \left(P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right) \cdot \left(P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right) \cdots \left(P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} \right) \\ &= P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{2013} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 2^{2013} & 0 \\ 0 & (-1)^{2013} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

תרגיל: תהא $A = \begin{pmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ הוכח: $a_i \neq a_j$ לכסינה.

פתרון: היעזר במשפט: $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לכסינה \Leftrightarrow יש בסיס של ו"ע ל \mathbb{F}^n .
 תרגיל: הוכח ש $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ 0 & \sqrt{17} & 3 \end{pmatrix}$ מטריצות דומות.
 פתרון: תרגיל: היעזר בתרגיל הקודם.