

אנליזה 1 למורים - תרגיל 6

שאלה 1

חשבו את הגבולות החד צדיים הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^5 - 14x^4 + 48x^3}{x^2 - 12x + 36}$$

פתרון

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^5 - 14x^4 + 48x^3}{x^2 - 12x + 36} &= \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^3(x^2 - 14x + 48x)}{(x-6)^2} = \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^3(x-6)(x-8)}{(x-6)^2} &= \lim_{x \rightarrow 6^+} \frac{x^3(x-8)}{(x-6)} = \frac{-432}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

$$\text{ב. } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right]$$

פתרון

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)(1+x)} \right] = \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1+x-2}{(1-x)(1+x)} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{x-1}{(1-x)(1+x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{-(1-x)}{(1-x)(1+x)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{-1}{(1+x)} \right] = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ג. } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^3 + 6x^2 - 8x}{x^2 - 5x + 6}$$

פתרון

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^3 + 6x^2 - 8x}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x(x^2 - 6x + 8)}{x^2 - 5x + 6} = \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x(x-2)(x-4)}{(x-3)(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x(x-4)}{(x-3)} = -4 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \text{ (השתמשו בנוסחה:)} \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^x \right)^{\left(\frac{1}{\sin(x)} \right)} . \tau$$

פתרון

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^x \right)^{\left(\frac{1}{\sin(x)} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} \right) (\ln(e^x))} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} \right) (x \ln(e))} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin(x)} \right)} = e$$

שאלה 2

האם הפונקציה הבאה רציפה ב-0?

אם כן- הוכיחו

אם לא- סווגו את נקודת האי רציפות שלה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(1 - \cos(3x))}{3x^2} & x > 0 \\ 3 & x = 0 \\ \frac{\sin(3x)}{x} & x < 0 \end{cases}$$

השתמשו ב-2 הנוסחאות הבאות:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

פתרון

נחשב את הגבול מימין:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(1 - \cos(3x))}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \left(2 \sin^2 \left(\frac{3x}{2} \right) \right)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4 \sin^2 \left(\frac{3x}{2} \right)}{3x^2} = \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \left(\frac{3x}{2} \right)}{\frac{3x^2}{4}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \left(\frac{3x}{2} \right)}{\left(\frac{3x}{2} \right)^2 \cdot \frac{1}{3}} = \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \left(\frac{3x}{2} \right)}{\left(\frac{3x}{2} \right)} \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \left(\frac{3x}{2} \right)}{\left(\frac{3x}{2} \right)} \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1/3} \right] \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3 \end{aligned}$$

נחשב את הגבול משמאל:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3 \sin(3x)}{3x} = 3$$

הגבולות מימין ומשמאל שווים, ולכן הגבול של הפונקציה ב-0 הוא 3. הגבול של הפונקציה ב-0 שווה לערך הפונקציה ב-0.

ולכן הפונקציה רציפה ב-0

שאלה 3

האם הפונקציה הבאה רציפה ב-0?

אם כן- הוכיחו

אם לא- סווגו את נקודת האי רציפות שלה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 10 & x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin(x) + 2 & x < 0 \end{cases}$$

פתרון

נחשב את הגבול מימין:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

הגבול מימין לא קיים ולכן הפונקציה לא רציפה ב-0.

וזו נקודת אי רציפות ממין שני.

שאלה 4

לאילו ערכי a הפונקציה f(x) רציפה ב-0? אחרת איזה סוג אי רציפות יש ב-0?

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x) - 2x}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

השתמשו בנוסחה:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

פתרון

נחשב את הגבול ב-0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} - 2 \right) = 1 - 2 = -1$$

הגבול קיים ושווה ל: 1- ולכן על מנת שהפונקציה תיהיה רציפה ב-0 נדרוש כי $a = -1$.
אחרת, אם a שונה מ: 1- אזי זו נקודת אי רציפות סליקה.