# משטחים מופשטים

## תזכורת

- גיאומטריה חיצונית: אם משטח משוכן במרחב גדול יותר $\mathbb{R}^n$, ויש פרמטריזציה $X : \Omega \to S \subset \mathbb{R}^n$, אפשר לחשב $g_{ij}$.
- גיאומטריה פנימית: תכונות פנימיות - כל מה שאפשר לחשב מתוך המטריקה. מבינים את התכונות המקומיות של המשטח ע"י קידוד המידע בתוך מטריקה $g_p$ - אורך וקטור, זוית, שטח, עקמומיות.

## הגדרה - משטח מופשט

מרחב דו מימדי שבו לכל נקודה $p \in S$ מותאמת באופן רציף מטריקה $g_p$(תבנית בי לינארית) הפועלת על $T_p$.

- כאשר המשטח נתון ע"י שיכון $X$, $g_p$ מתקבלת ע"י חישוב $g_{ij}$
- גם את המרחב המשיק $T_p$ הגדרנו באמצעות הפרמטריזציה $X$ כבמרחב שנפרש ע"י $X_1$ ו$X_2$.

## הגדרה של $T_p$ עבור משטח מופשט

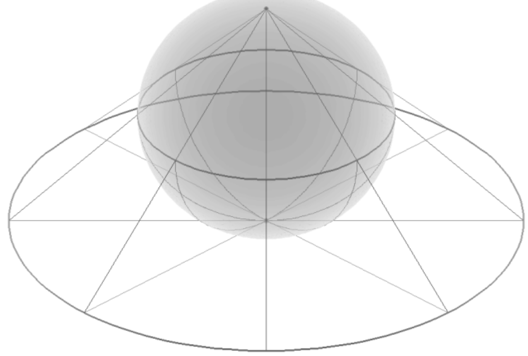
כל וקטור $v \in T_p$ מגדיר נגזרת מכוונת, ולכן במקרה המופשט מגדירים את $T_p$ כמרחב כל הנגזרות הכיווניות - דריבציות - ומקיים את כלל ליבניץ.

## דוגמאות

1. המישור $\mathbb{R}^2$ עם המטריקה $\left(dx^2+dy^2\right) \frac{1}{\left(1+\frac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)^2} \Leftarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2} \end{pmatrix}$

   לכאורה נראה שזה מישור רגיל - אבל העקמומיות היא $k=\rho$ - העקמומיות של ספירה ברדיוס $\frac{1}{\rho}$. ככל שמתרחקים מהראשית העקמומיות יורדת.

   המטריקה הזו באמת מושרית מהספירה ע"י הטלה סטריאוגרפית:



ק;

2. חצי המישור העליון $H=\{y>0\}$ עם המטריקה $k=-1 \Leftarrow \frac{1}{y^2}\left(dx^2+dy^2\right)$.

למשטח הזה אין שיכון ב$\mathbb{R}^3$!

למשטח הזה יש גיאומטריה היפרבולית. יש כמה סוגים של גיאומטריות על המישור:

- אוקלידית - הגיאומטריה הרגילה. שני קוים מקבילים לא נפגשים.
- פרבולית - כמו גיאומטריה על כדור. קוים מקבילים יכולים להיפגש בשני נקודות.
- היפרבולית - דרך כל נקודה עוברים אינסוף ישרים מקבילים.

העקומות הגיאודזיות הם חצאי מעגלים שמרכזם בציר ה$x$ או ישרים מאונכים לציר $x$.

3. טורוס שטוח.

נתבונן בשריג ב$\mathbb{R}^2$ $L=\mathbb{Z}v_1+\mathbb{Z}v_2$.

נגדיר יחס שקילות: עבור $u_1,u_2\in R^2$, $u_1\sim u_2$ אם $u_1=u_2+v$ עבור $v\in L$

## הגדרה - טורוס שטוח

טורוס שטוח $T=\mathbb{R}^2/N=\mathbb{R}^2/L$.

איך זה נראה? מספיק מקבילית מייצגת אחת - נקראת "תחום יסודי". כל צלע במקבילית היא בדיוק אותה צלע כמו המקבילה - לא שווה לה - אלא בדיוק אותה צלע.

מכיוון ששני צלעות מקבילות הן אותה צלע, אפשר להדביק אותן וליצור גליל. אבל גם שני הבסיסים של הגליל הם אותו בסיס - ניתן להדביק גם אותם, וליצור טורוס - אבל עם עקמומיות 0, במקום העקמומיות המשתנה של הטורוס הרגיל.

- מבחינה טופולוגית, טורוס "רגיל" שקול לטורוס שטוח - הומאומורפיזם
- מבחינה גיאומטרית הם שונים - בטורוס השטוח מטריקה שטוחה - $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ - $dx^2+dy^2$.

כל שריג דומה לשריג שנפרש ע"י $1,\tau\in\mathbb{C}$ כך ש$\tau$ נמצא בתחום התחום היסודי $D$

$$D=\left\{|z|\geq 1,\frac{1}{2}\leq \mathrm{Re}\ z\leq\frac{1}{2},\mathrm{Im}\ z>0\right\}$$

$\tau$ נקרא הפרמטר הקונפורמי של $T$.

## מהו הקשר בין טורוס סיבוב לטורוס שטוח?

$$\gamma(\phi) = (f(\phi), 0, g(\phi))$$

עקומה סגורה במישור $xz$ עם <u>פרמטריזציה במהירות יחידה</u>.

$$X(\theta,\phi) = (f\cos\theta, f\sin\theta, g)$$

$$\Downarrow$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} f^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ראינו בהרצאה כי ע"י החלפת המשתנים $\psi(\phi) = \int_0^\phi \frac{1}{f(u)}\,\mathrm{d}u$ מקבלים פרמטריזציה

$$X(\theta,\psi) = \left(\overline{f}(\psi)\cos\theta, \overline{f}(\psi)\sin\theta, \overline{g}(\psi)\right)$$

מקבלים מטריקה שקולה קונפורמית למטריקה שטוחה:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} f^2(\psi) & 0 \\ 0 & f^2(\psi) \end{pmatrix} = f^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(תזכורת: 2 מטריקות $g$ ו$h$ שקולות קונפורמית אם קיים $\lambda > 0$ כך ש$g = \lambda h$, ו$\lambda$ נקרא פרמטר קונפורמי).

בנוסף, מהתחום $\begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \phi \le \phi_{\max} \end{matrix}$ הפרמטריזציה עברה לתחום $\begin{matrix} 0 \le \theta \le 2\pi = c \\ 0 \le \psi \le \int_0^{\phi_{\max}} \frac{1}{f(u)}\,\mathrm{d}u = d \end{matrix}$

(בתרגיל - חשב את הפרמטר הקונפורמי של הטורוס)

הטורוס דומה לטורוס $L_{1,\tau} = \operatorname{span}\left\{1, \max\left\{\frac{c}{d}, \frac{d}{c}\right\}\right\}$.