$X$ מ"ט, $a,b\in X$, $\Gamma_{ab}$ כל המסילות מ$a$ ל$b$.
מביטים ביחס השקילות $\delta \underset{\partial I}{\sim} \gamma$. קבוצת מחלקות השקילות.
אם $[\gamma]\in\widehat{\Gamma}_{ab}$, $[\delta]\in\widehat{\Gamma}_{bc}$, הראינו שהפעולה $[\gamma]\,[\delta]:=[\gamma\cdot\delta]$ מוגדרת היטב.

## טענה 1

אם

$$[\gamma]\in\widehat{\Gamma}_{ab},[\delta]\in\widehat{\Gamma}_{bc},[\epsilon]\in\widehat{\Gamma}_{cd}$$

אז

$$([\gamma]\,[\delta])\,[\epsilon]=[\gamma]\,([\delta]\,[\epsilon])$$

## טענה 2

אם $[\gamma]\in\widehat{\Gamma}_{ab}$, $[k_a]\in\widehat{\Gamma}_{aa}$ אז

$$[k_a]\,[\gamma]=[\gamma]$$

$$[\gamma]\,[k_b]=[\gamma]$$

## הגדרה

אם $\gamma:I\to X$ נסמן $\overline{\gamma}:I\to X$ את המסילה ההפוכה. כלומר

$$\overline{\gamma}\,(t):=\gamma\,(1-t)$$

## טענה 3

יהי $[\gamma]\in\widehat{\Gamma}_{ab}$, אזי

$$[\gamma]\,[\overline{\gamma}]=[k_a]$$

$$[\overline{\gamma}]\,[\gamma]=[k_b]$$

כיוון ש$\gamma=\overline{\overline{\gamma}}$ שתי הטענות אומרות אותו הדבר.

**בניית ההומוטופיה(עבור 3)**

בזמן 0 ההומוטופיה הולכת עם $\gamma$ וחוזרת עם $\overline{\gamma}$. ככל שהזמן עובר ההומוטופיה הולכת פחות ופחות על $\gamma$ ויש לה פחות ופחות לחזור על $\overline{\gamma}$, עד שלבסוף, בזמן אחד, היא פשוט נשארת בנקודת ההתחלה $a$.

## האם יש לנו חבורה?

לא! אמנם כשהכפל מוגדר הוא מקיים את התנאים של חבורה, אבל הוא מוגדר רק אם נקודת הסיום של הכופל השמאלי היא נקודת ההתחלה של הכופל הימני. לכן זו לא באמת חבורה, אלא פסאדו־חבורה.

## הגדרה

עבור מ"ט $X$ ונקודה $a \in X$(היא תקרא נקודת הבסיס) נגדיר

$$\Pi_1(X, a) := \widehat{\Gamma}_{aa}$$

$\Pi_1(X, a)$ נקראת החבורה היסודית של $X$ ביחס לנקודת הבסיס $a$.

## סיכום ביניים

יש לנו מרחב טופולוגי $X$ ונקודת בסיס $a$ ־ "מרחב טופולוגי מנוקד".

שתי מסילות שקולות אם יש להן יחס שקילות ביחס לקצוות(כלומר ל$a$ ־ הקצה היחיד).

## זהו הפנקטור שלנו!

אמנם כרגע אנו תלויים בנקודת הבסיס, אבל כשנוכיח את הטענות נשתדל שהן לא יהיו תלויות בנקודת הבסיס.

אבל הפנקטור צריך גם לשמר מורפיזמים. מה המורפיזמים שצריך לשמר?

$$f : (X, a) \to (Y, b)$$

כלומר העתקות רציפה $f : X \to Y$ כך ש$f(a) = b$

## הגדרה

תהי $f : (X, a) \to (Y, b)$.

נגדיר הומומורפיזם

$$f_* : \Pi_1(X, a) \to \Pi_1(Y, b)$$

ע"י

$$f_*([\gamma]) := [f \circ \gamma]$$

**צ"ל:** 1. מוגדר היטב
2. $f_*$ הומומורפיזם של חבורות

### הוכחה

1. צ"ל שאם $\gamma \underset{\partial I}{\sim} \delta$ אז $f\circ\gamma \underset{\partial I}{\sim} f\circ\delta$. אבל כבר הוכחנו את זה בתרגיל 2.
2. צ"ל $f_*\left([\gamma][\delta]\right) = f_*\left([\gamma]\right) f_*\left(\delta\right)$. כלומר צ"ל

$$f\circ(\gamma\cdot\delta) \underset{\partial I}{\sim} (f\circ\gamma)\cdot(f\circ\delta)$$

נראה שלמעשה מתקיים כאן ממש שוויון:

$$\gamma\cdot\delta\left(t\right) := \begin{cases} \gamma\left(2t\right) & 0\leq t\leq\frac{1}{2} \\ \delta\left(2t-1\right) & \frac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

$$f\circ(\gamma\cdot\delta)\left(t\right) = \begin{cases} f\left(\gamma\left(2t\right)\right) & 0\leq t\leq\frac{1}{2} \\ f\left(\delta\left(2t-1\right)\right) & \frac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

$$(f\circ\gamma)\cdot(f\circ\delta) = \begin{cases} f\circ\gamma\left(2t\right) & 0\leq t\leq\frac{1}{2} \\ f\circ\delta\left(2t-1\right) & \frac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} f\left(\gamma\left(2t\right)\right) = f\circ\gamma\left(2t\right) \\ f\left(\delta\left(2t-1\right)\right) = f\circ\delta\left(2t-1\right) \end{array} \implies f\circ(\gamma\cdot\delta) = (f\circ\gamma)\cdot(f\circ\delta)$$

## הקשר בין העתקות על $I$ שערכת על הקצוות מתלכד לבין העתקת המעגל

קטע שהקצוות שלו מתלכדים איזומורפי למעגל, ולכן העתקה $\gamma$ על $I$ ששולחת את הקצוות לאותו מקום($\gamma\left(0\right) = \gamma\left(1\right)$) מקבילה להעתקה על המעגל(אפשר לקבל ע"י הרכבה עם $t\mapsto e^{2\pi i\cdot t}$)

נרצה להראות שיש לא רק הקבלה אלא גם בין ההומוטופיות: כלומר אם יש לנו הומוטופיה $H: I\times I\to X$ נרצה למצוא הומוטופיה מקבילה $\widehat{H}: S^1\times I\to X$:

$$\begin{tikzcd} I\times I \arrow[rr, "H"] \arrow[dr, "\left(t\mapsto e^{2\pi i\cdot t}, Id_I\right)"'] & & X \\ & S^1\times I \arrow[ur, "\widehat{H}"'] & \end{tikzcd}$$

## הערה

מותר שנקודת ההתחלה תשתנה עם הזמן, כל עוד היא משתנה לכל אורך ההומוטופיה - כלומר $H\left(0,t\right) = H\left(1,t\right)$ לכל $t\in I$, גם אם $H\left(*,t_1\right)\neq H\left(*,t_2\right)$ עבור $t_1\neq t_2$ כלשהם.

## הגדרה

יהיו $a,b$ שתי נקודות ב$X$ ותהי $\gamma$ מסילה מ$a$ ל$b$.
נגדיר איזומורפיזם $F_\gamma : \Pi_1(X,a) \to \Pi_1(X,b)$ ע"י $F_\gamma([\gamma]) := [\overline{\gamma}][\varphi][\gamma]$.

**צ"ל:**
1. $F_\gamma$ הומומורפיזם.
2. $F_\gamma$ למעשה איזומורפיזם.

### הוכחה

זהו הומומורפיזם:

$$F_\gamma([\varphi])\,F_\gamma([\psi]) = [\overline{\gamma}][\psi][\gamma][\overline{\gamma}][\psi][\gamma] = [\overline{\gamma}][\varphi][k_a][\psi][\gamma] = [\overline{\gamma}][\varphi][\psi][\gamma] = F_\gamma([\gamma][\psi])$$

זהו איזומורפיזם כי $F_{\overline{\gamma}}$ ההפכי של $F_\gamma$. כלומר

$$F_{\overline{\gamma}} \circ F_\gamma = Id_{\Pi_1(X,a)}$$

$$F_\gamma \circ F_{\overline{\gamma}} = Id_{\Pi_1(X,b)}$$

מספיק להוכיח אחד מהם(כי הם סימטריים):

$$F_{\overline{\gamma}} \circ F_\gamma([\varphi]) = [\gamma][\overline{\gamma}][\varphi][\gamma][\overline{\gamma}] = [k_a][\varphi][k_a] = [\varphi]$$

## משפט

יהי $X$ מ"ט, $a \in X$, $A \subseteq X$ מרכיב הקשירות המסילתית של $a$ ב$X$. נסמן ב$i : A \to X$ את העתקת ההכלה. אזי:

$$i_* : \Pi_1(A,a) \to \Pi_1(X,a)$$

היא איזומורפיזם.

**הוכחה:** תרגיל.

## טענה

נניח $H : I \times I \to X$ מקיימת שלכל $t$, $H(0,t) = H(1,t)$.

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "\psi"] & {} \\ a \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\varphi"'] & {} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

נסמן:

$$\varphi(s) := H(s,0)$$

$$\psi(s) := H(s,1)$$

$$\gamma(t) := H(0,t) = H(1,t)$$

אזי

$$[\psi] = [\overline{\gamma}][\varphi][\gamma]$$

צ"ל: $[\gamma][\varphi][\overline{\gamma}]\left[\overline{\psi}\right] = [k_b]$. זה אכן מתקיים כי המסילה $\gamma\cdot\varphi\cdot\overline{\gamma}\cdot\overline{\psi}$ היא העתקה על שפת הדיסק $I\times I$ ו$H$ היא הרחבה לפנים הדיסק.

## משפט

יהיו $f,g : X\to Y$, $f\sim g$, ותהי $a\in X$.

$$f_* : \Pi_1(X,a) \to \Pi_1(Y,f(a))$$

$$g_* : \Pi_1(X,a) \to \Pi_1(Y,g(a))$$

תהי $H : X\times I\to Y$ הומוטופיה מ$f$ ל$g$. נגדיר $\gamma : I\to Y$ ע"י $\gamma(t) := H(a,t)$. זוהי מסילה מ$f(a)$ ל$g(a)$. אזי

$$g_* = F_\gamma \circ f_*$$

$$\begin{tikzcd}
 & \Pi_1(Y,f(a)) \arrow[dd, "F_\gamma"] \\
\Pi_1(X,a) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[dr, "g_*"'] & \\
 & \Pi_1(Y,g(a))
\end{tikzcd}$$

## הוכחה

צ"ל שלכל $[\varphi] \in \Pi_1(X,a)$ מתקיים $g_*([\varphi]) = F_\gamma(f_*([\varphi]))$. כלומר צ"ל $g\circ\varphi \underset{\partial I}{\sim} \gamma\cdot f\circ\varphi\cdot\overline{\gamma}$.

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "g\circ\varphi"] & {} \\ {} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "f\circ\varphi"'] \arrow[ur, phantom, "K"] & {} \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

$$K(s,t) := H(\varphi(s), t)$$

$$s = 0,1 \implies \varphi(s) = a$$

## משפט

יהיו $X,Y$ מ"ט, $f: X\to Y$ שקילות הומוטופית, $a\in X$. אזי

$$f_* : \Pi_1(X,a) \to \Pi_1(Y, f(a))$$

היא איזומורפיזם

## הוכחה

$f$ שקילות הומוטופית פירושו שיש $g: Y\to X$ כך ש $\begin{matrix} g\circ f \sim Id_X \\ f\circ g \sim Id_Y \end{matrix}$.

$$\begin{tikzcd} \Pi_1(X,a) \arrow[dr, "f_{*a}"] & \\ & \Pi_1(Y, f(a)) \arrow[dl, "g_{*f(a)}"'] \\ \Pi_1(X, g(f(a))) \arrow[dr, "f_{g(f(a))}"] & \\ & \Pi_1(Y, f(g(f(a)))) \end{tikzcd}$$

לכאורה נראה שאפשר להמשיך ככה עד אינסוף, אבל $g_*\circ f_* = \left(g\circ f\right)_*$ שכן $g_*\left(f_*\left([\varphi]\right)\right) = [\left(g\circ f\right)\circ\varphi]$. לכן:

$$\begin{tikzcd}
\Pi_1\left(X,a\right) \arrow[dr, "f_{*a}"] \arrow[dd, "\left(g\circ f\right)_*=F_\gamma"'] & \\
& \Pi_1\left(Y,f\left(a\right)\right) \arrow[dl, "g_{*f(a)}"'] \arrow[dd, "F_\gamma"] \\
\Pi_1\left(X,g\left(f\left(a\right)\right)\right) \arrow[dr, "f_{g(f(a))}"] & \\
& \Pi_1\left(Y,f\left(g\left(f\left(a\right)\right)\right)\right)
\end{tikzcd}$$

$F_\gamma$ היא איזומורפיזם. שכן

$$g\circ f\sim Id$$

$$\left(g\circ f\right)_* = F_\gamma\circ Id_* = F_\gamma$$

כאמור, לא ניתן לקבל זהות(שכן מדובר בחבורות שונות), אבל הצלחנו לקבל ש

- $g_{*f(a)}\circ f_{*a}$ איזומורפיזם, בפרט **על**, ולכן $g_{*f(a)}$היא **על**.
- $f_{*g(f(a))}\circ g_{*f(a)}$ איזומורפיזם, בפרט **חח"ע**, לכן $g_{*f(a)}$ **חח"ע**.

כלומר קיבלנו ש$g_{*f(a)}$ איזומורפיזם, ולכן

$$f_{*a} = \left(g_{*f(a)}\right)^{-1}\circ F_\gamma$$

היא איזומורפיזם.