דקדוקים

הגדרה של דקדוק רגולארי

- לינארי ימני - $A \to aB|a$
- לינארי שמאלי: $A \to Ba|a$

אך לא שילוב של השניים.

משפט

אם L מתקבלת ע"י דקדוק רגולארי, אז קיים אוטומט A שמקבל אותה.

משפט

אם L מתקבלת ע"י אוטומט, אז קיים דקדוק רגולארי שמקבל אותה.

הוכחה

נתון: $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ אוטומט סופי דטרמיניסטי מלא

נבנה: $G = (V, T, S, P)$

$$V = \{v_i | q_i \in Q\}$$

$$T = \Sigma$$

$$S = v_0$$

לכל $\delta(q, \sigma) = p$ נגדיר כלל גזירה מתאים לP:

$$\delta(q_i, \sigma) = q_j \Rightarrow v_i \to \sigma v_j$$

אם $q \in F$ אז נוסיף את הכלל

$$v_i \to \sigma$$

אם $\varepsilon \in L(A)$ אז נוסיף

$$v_0 \to \varepsilon$$

סגירות

הוכח/הפרך

שפת המילים המינימלית של L רגולארית בהינתן L רגולארית.

תזכורת: שפת המילים המינימלית מכילה את כל ה$w \in L$ כך שלא קיימת רישא אמיתית שלהן שגם נמצאת בL.

הוכחה

נשנה את המצבים המקבלים כך שלא יהיה אפשר לצאת מהם.

הוכח/הפרך

שפת המילים המקסימליות של L רגולארי בהינתן L רגולארית

הגדרה: שפת המילים המקסימליות היא כל w כך שלא קיימת $x \in \Sigma^+$ כך ש$w \cdot x \in L$.

הוכחה

בהנתן A המקבל את L

$$A = \langle Q, \Sigma, q_0, \delta, F \rangle$$

נשנה את F:

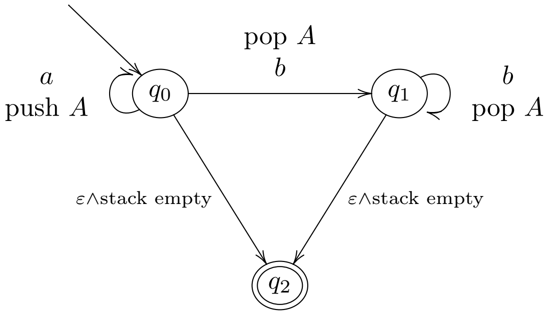
$$F' = \{q | q \in F, \nexists_{x \in \Sigma^+} \delta(q, x) \in F\}$$

אוטומט מחסנית

- לאוטומט יש לוגיקה, והוא יכול לזכור(באמצעות המצבים). הזיכרון שלו סופי.
- מחסנית יכולה רק לזכור. הזיכרון שלה אינסופי, אבל בכל פעם אפשר לגשת רק לאיבר אחד - זה שבראש המחסנית.

באמצעות שילוב שלהם - אוטומט מחסנית - ניתן לקבל דקדוקים חסרי הקשר.

דוגמה לקבלת שפה $a^n b^n$



הגדרה פורמלית

אוטומט מחסנית הוא שביעיה

$$M = \langle Q, \Sigma, \mu, q_0, \dashv, \delta, F\rangle$$

כאשר

- Q קבוצת המצבים
- Σ הא"ב של הקלט
- μ אותיות א"ב של המחסנית
- $\dashv$ תו פתיחה שנמצא בראש המחסנית לפני תחילת הקריאה. $\dashv\in\mu$
  אפשר לחשוב על $\dashv$ כעל הקפיץ של המחסנית - אם מוציאים אותו, המחסנית נתקעת ואי אפשר להשתמש בה יותר.
- δ פונקציית מצבים $\delta : Q\times\sum\cup\{\epsilon\}\times\mu\to P\left(Q\times\mu^*\right)$(הערה: זה אומר שאפשר להכניס הרבה דברים למחסנית בבת אחת, אבל להוציא - אפשר רק את הראש).
- F מצבים מקבלים

שפת אוטומט המחסנית

ניתן להגדיר שני אופני קבלה:

1. בשיטת מצבים מקבלים:

$$L_F = \left\{ w \middle| \begin{array}{c} \delta\left(q_0, w, \dashv\right) = \left(q_F, \alpha\right) \\ q_F\in F, \alpha\in\mu^* \end{array} \right\}$$

הערה: אם במהלך קריאת המילה המחסנית התרוקנה לחלוטין(כולל $\dashv$) אז אנו נתקעים והמילה לא תתקבל.

2. שיטת ריקון מחסנית:

$$L_C = \{w | \delta (q_0, w, \dashv) = (q, \varepsilon)\}$$

(כלומר מגיעים למצב ומחסנית ריקה)

פעולות על מחסנית

הוצאה(pop)

$$\delta (q, a, A) = (p, \varepsilon)$$

- מתחילים במצב q, קוראים a, והוצאנו את ראש המחנית שהיה A.
- מגיעים למצב p, ודוחפים ε לראש המחסנית

ללא שינוי

$$\delta (q, a, A) = (p, A)$$

כאן אנו דוחפים את A בחזרה למחסנית.

הכנסה(push)

$$\delta (q, a, A) = \left(p, \underleftarrow{BA}\right)$$

דוחפים את A למחסנית, ואחריו דוחפים את B - כך שB הוא ראש המחסנית החדש.
אפשר גם להכניס יותר מאיבר אחד:

$$\delta (q, a, A) = \left(p, \underleftarrow{DCBA}\right)$$

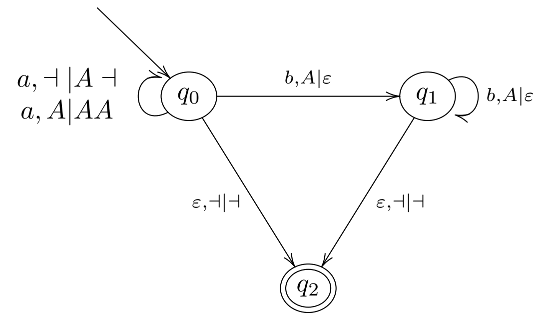
החלפה של ראש מחסנית

$$\delta (q, a, A) = (p, B)$$

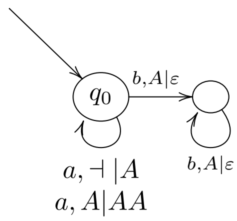
נחזור לדוגמה $a^n b^n$

נכתוב את האוטומט בשיטת מצבים מקבלים, לפי ההגדרה והסימנים החדשים:

$$\mu = \{\dashv, A\}$$



נכתוב את האוטומט בשיטת ריקון:



נשים לב שאנחנו לא דוחפים את $\dashv$ בחזרה - כי המחסנית חייבת להיות ריקה לגמרי בשביל לקבל.

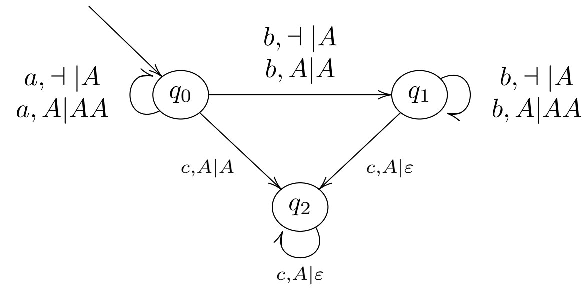
תרגיל

בנו אוטומט מחסנית לקבלת

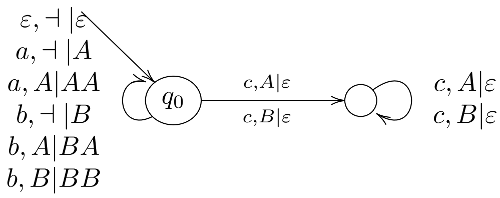
$$L = \left\{a^n b^m c^{n+m}\right\}$$

בשיטת ריקון

פתרון



ניתן לכתוב את האוטומט בצורה קצת שונה, ע"י הגדרת הא"ב של המחסנית ־ ובתמורה נקבל הקטנה במספר המצבים:



השתמשנו במחסנית בשביל לזכור מצבים, במקום במצבים עצמם.

דוגמה

$$L = \left\{ w \middle| \begin{array}{c} \#_a (w) = \#_b (w) \\ \forall_{x \text{ prefix of } w} \#_a (x) \geq \#_b (x) \end{array} \right\}$$

בנו אוטומט מחסנית המקבל את L באמצעות אוטומט עם <u>מצב אחד בלבד</u>