פתרון מערכת משוואות לינאריות(המשך)

יציבות/Conditioning

במקרה של מטריצה סינגולרית, A^{-1} לא קיימת ו$\det(A)=0 \Leftarrow$ **אין פתרון אחד ויחיד למערכת המשוואות!**

ביצוע האלימינציה ייתן בסופו של דבר אפס על האלכסון, מה שיוביל למצב של אינסוף פתרונות ־ או של אין פתרון.

אבל מה אם המטריצה "כמעט סינגולרית"?

במקרים בהם המערכת על סף סינגולריות, השגיאה היחסית גדולה ביותר!

אינטואיציה

- אם שינוי יחסי קטן בקלט גורם לשינוי יחסי קטן בפלט ־ אז המערכת יציבה.
- אם שינוי יחסי קטן בקלט גורם לשינוי יחסי גדול בפלט ־ אז המערכת לא יציבה.

הגדרה פורמלית

מספר מצב(condition number) מודד את השינוי היחסי בפלט לעומת השינוי היחסי בקלט:

$$K\left(\underline{x}\right) \overset{\text{def}}{=} \sup_{\delta\underline{y}} \frac{\|\delta\underline{x}\|/\|\underline{y}\|}{\|\delta\underline{y}\|/\|\underline{y}\|}$$

כאשר $\underline{y}$ ו$\underline{x}$ וקטורי הקלט והפלט, בהתאמה.

$\delta\underline{y}$ וקטור הפרטורבציה ו$\delta\underline{x}$ וקטור הסטיה מהפתרון האמיתי.(מונחים מעולם ההנדסה. פרטורבציה ־ שינוי בכניסה. סטיה ־ שינוי ביציאה. מערכת יציבה היא מערכת שלא מגיבה בצורה דרסטית על שינויים קטנים.)

חישוב נורמות של ווקטורים

$\|\cdot\|$ ־ נורם(norm) או אורך(גודל) של וקטור(מטריצה).

באופן כללי:

$$\|\underline{x}\|_p \triangleq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

קל לראות כי מההגדרה הזו נובעים המקרים הפרטיים:

1. $p = 1$ - $\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
2. $p = 2$ - $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} = \|\underline{x}\|_2$ - נורמה אוקלידית
3. $p = \infty$ - $\|\underline{x}\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

הוכחה ל$\|\cdot\|_\infty$: נניח שx_i הוא המקסימלי בערך מוחלט:

$$\|\underline{x}\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \left(|x_i|^p \left(\cancel{\left|\frac{x_1}{x_i}\right|^p} + \cancel{\left|\frac{x_2}{x_i}\right|^p} + \cdots + \cancel{\left|\frac{x_n}{x_i}\right|^p} \right) \right)^{1/p} = x_i$$

(כל שאר הxים נעלמים כי $\left|\frac{x_j}{x_i}\right| < 1$ ולכן $\left|\frac{x_j}{x_i}\right|^p \to 0$)

תכונות הנורם שנדרשות מווקטורים ומטריצות

1. $\|A\| \ge 0$ ו$\|A\| = 0$ אם"ם $A = 0$.
2. $\|k \cdot A\| = |k| \, \|A\|$(כפל בקבוע)
3. אי שוויון המשולש - $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$
4. אורך מכפלה קטן ממכפלת האורכים - $\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

אינטואיציה ל4: $\bar{A} \cdot \bar{B} = \|A\| \, \|B\| \cos\theta$, לכן

$$\left\|\bar{A} \cdot \bar{B}\right\| = \|\|A\| \, \|B\| \cos\theta\| = \|A\| \, \|B\| \, |\cos\theta| \le \|A\| \, \|B\|$$

נורמות נפוצות למטריצות

- $\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ - סכום עמודה מקסימלי
- $\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ - סכום שורה מקסימלי

כמו כן ניתן להגדיר $\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$(נורם Frobenius) ולהראות כי $\|A\|_2 \le \|A\|_F$.

וכן $\sqrt{r_\sigma\left(A^t \cdot A\right)}$ $\|A\|_2$ באשר $|\lambda|$ $r_\sigma(A) \triangleq \max\limits_{\lambda\in\sigma(A)}$ - כלומר הערך העצמי(בערך מוחלט) הגדול ביותר של המטריצה A.

חישוב מספר המצב עבור מערכת משוואות לינאריות

מקרה I - שינוי בb

כאשר

$$A\underline{x} = \underline{b}$$

הופך ל

$$A\overline{\underline{x}} = \underline{b} + \underline{r}$$

נגדיר $\underline{e} = \overline{\underline{x}} - \underline{x}$, ואז

$$A\underline{e} = A\left(\overline{\underline{x}} - \underline{x}\right) = A\overline{\underline{x}} - A\underline{x} = \cancel{\underline{b}} + \underline{r} - \cancel{\underline{b}} = \underline{r}$$

$$\boxed{\underline{e} = A^{-1}\underline{r}}$$

$\underline{e}$ זה השינוי בפלט ו$\underline{r}$ זה השינוי בקלט. רוצים למצוא חסם עליון ל$\frac{\|\underline{e}\|/\|\underline{x}\|}{\|\underline{r}\|/\|\underline{b}\|}$.

לפי תכונות של נורמות של מטריצות נקבל

$$\|\underline{r}\| = \|A\underline{e}\| \leq \|A\|\,\|\underline{e}\|$$

$$\|\underline{e}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \cdot \|\underline{r}\|$$

נחלק את המשוואה הראשונה ב$\|A\|\,\|\underline{x}\|$ ואת השנייה $\|\underline{x}\|$, ונקבל

$$\boxed{\frac{\|\underline{r}\|}{\|A\|\,\|\underline{x}\|} \leq \frac{\|\underline{e}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\|\,\|\underline{r}\|}{\|\underline{x}\|}}$$

נוסיף לכך את אי השוויונים $\|\underline{b}\| \leq \|A\|\,\|\underline{x}\|$ ו$\|\underline{x}\| \leq \left\|A^{-1}\right\|\,\|\underline{b}\|$ ונקבל

$$\frac{1}{\|A\|\,\|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\underline{r}\|}{\|\underline{b}\|} \leq \frac{\|\underline{e}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \|A\|\left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\underline{r}\|}{\|\underline{b}\|}$$

שכן

$$\frac{1}{\|\underline{x}\|} \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} \cdot \frac{1}{\|\underline{b}\|} \qquad \frac{1}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\|A\|}{\|\underline{b}\|}$$

קיבלנו שהמכפלה $\boxed{\|A\| \left\|A^{-1}\right\|}$ מראה את השינוי בפלט לעומת השינוי בקלט - והיא נקראת מדד היציבות(condition number) של המטריצה. ככל שהוא גדול יותר ככה המערכת פחות יציבה.

מספר המצב האופטימלי הוא 1, כי

$$\underline{1} = \|I\| = \left\|A \cdot A^{-1}\right\| \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| = \operatorname{cond}(A)$$

מקרה II - שינוי באיברי המטריצה A

במקום המטריצה A מקבלים $A + \delta A$. נקבל:

$$\underline{x} = A^{-1}\underline{b} = A^{-1}(A + \delta A)\,\overline{\underline{x}} = \left(I + A^{-1}\delta A\right)\overline{\underline{x}} = \overline{\underline{x}} + \left(A^{-1}\delta A\right)\overline{\underline{x}}$$

מכאן

$$\underline{x} - \overline{\underline{x}} = \left(A^{-1}\delta A\right)\overline{\underline{x}}$$

או

$$\frac{\|\underline{x} - \overline{\underline{x}}\|}{\|\overline{\underline{x}}\|} \leq \left\|A^{-1}\delta A\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\delta A\|$$

כלומר

$$\frac{\|\underline{x} - \overline{\underline{x}}\|}{\|\overline{\underline{x}}\|} \leq \operatorname{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

מקרה III - שינוי גם באיברי A וגם בווקטור B

משפט: נתונה מערכת המשוואות $A\underline{x} = \underline{b}$ עבור A לא סינגולרית, ויהי $\delta(A)$ ו$\delta\underline{b}$ פרטורבציות הקלט.

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

מתקיים

$$\frac{\|\delta\underline{x}\|}{\|\underline{x}\|} \leq \frac{\operatorname{cond}(A)}{1 - \operatorname{cond}(A) \cdot \dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta\underline{b}\|}{\|\underline{b}\|}\right)$$

נשים לב:

$$\text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = \cancel{\text{cond}(A)} \cdot \frac{\|\delta A\| \left\|A^{-1}\right\|}{\cancel{\|A\| \left\|A^{-1}\right\|}}$$

$$1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} = 1 - \|\delta A\| \left\|A^{-1}\right\| \Rightarrow \|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$$

$$\frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \cdot \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \geq \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \cdot \text{cond}(A)$$

כלומר במקרה הכללי החסם יותר גדול מאשר במקרה שמשנים רק את A - וזה הגיוני!