תרגיל בית 9 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול.
תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך כ"ב טבת ה'תשע"ו, 3.1.16.

שאלה 1. בכל סעיף נתונה חבורה G ותת-חבורה $H \leq G$. הוכיחו כי $H \lhd G$ וחשבו את G/H על ידי משפט האיזומורפיזם הראשון:

א. $G = D_6$, $H = \left\langle \sigma^2, \tau \right\rangle$.

ב. $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}$, $H = (2\mathbb{Z}_4) \times (3\mathbb{Z})$.

נצטט את משפטי האיזומורפיזם השני והשלישי, ואז נוכיח אותם (לא לדאוג – יש הדרכה).

משפט (משפט האיזומורפיזם השני)**.** תהי G חבורה, תהי $H \leq G$ תת-חבורה, ותהי $N \lhd G$ תת-חבורה נורמלית. אזי $H \cap N \lhd H$, $N \lhd HN$, וכן

$$HN/N \cong H/H\cap N$$

משפט (משפט האיזומורפיזם השלישי)**.** תהי G חבורה, ותהיינה $H, K \lhd G$ תת-חבורות נורמליות של G כך ש-$K \subseteq H$. אזי

$$G/K \big/ H/K \cong G/H$$

שאלה 2. הוכיחו את משפט האיזומורפיזם השני: יהיו G, H ו-N כמו בניסוח המשפט. נגדיר $f : H \to HN/N$ לפי $f(h) = hN$.

א. הראו ש-f הומומורפיזם.

ב. הראו ש-f על.

ג. הוכיחו כי $\ker f = H \cap N$.

ד. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 3. הוכיחו את משפט האיזומורפיזם השלישי: יהיו G, H ו-K כמו בניסוח המשפט. נגדיר $f : G/K \to G/H$ לפי $f(gK) = gH$.

א. הוכיחו ש-f מוגדרת היטב. כלומר, אם $g_1K = g_2K$, אזי $f(g_1K) = f(g_2K)$.

ב. הראו ש-f הומומורפיזם.

ג. הראו ש-f על.

ד. הוכיחו כי $\ker f = H/K$.

ה. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 4. נתונות התמורות הבאות בחבורה S_7: $\sigma = (1,3,4,7,2)$, $\tau = (1,4,2)$, $a = (1,3,2)(5,4,6,7)$. חשבו את:

א. $a\sigma a^{-1}$.

ב. $a\tau a^{-1}$.

שאלה 5. נתונה התמורה $(1,4,2) \in S_4$.

א. מצאו את מחלקת הצמידות שלה ב-S_4.

ב. מצאו תמורה σ הצמודה ל-$(1,4,2)$ ב-S_4, אבל לא ב-A_4. הוכיחו את קביעתכם.

שאלה 6. נסתכל על החבורה S_4. נגדיר $K_4 = \{\mathrm{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$. תת-חבורה זו נקראת **תת-חבורת קליין**.

א. הוכיחו כי $K_4 \lhd S_4$.

ב. מצאו סדרה של תת-חבורות $G_n = \{\mathrm{id}\} \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = S_4$, כך שלכל i, $G_{i+1} \lhd G_i$, וגם לכל i המנה G_i/G_{i+1} היא חבורה ציקלית.
(**רמז:** היעזרו בסעיף הקודם ובתת-חבורה מוכרת).

שאלה 7. הוכיחו כי $S_n = \langle (1,2), (1,2,\ldots,n) \rangle$ בצעדים הבאים: ראשית, היזכרו כי S_n נוצרת על ידי החילופים, כלומר

$$S_n = \langle \{(i,j) | 1 \le i,j \le n, i \ne j\} \rangle$$

א. הראו כי כל חילוף (i,j) אפשר להציג כמכפלת חילופים מהצורה $(1,k)$, והסיקו כי

$$S_n = \langle (1,2), (1,3), \ldots, (1,n) \rangle$$

ב. הראו כי כל חילוף מהצורה $(1,k)$ אפשר להציג כמכפלת חילופים מהצורה $(m,m+1)$, והסיקו כי

$$S_n = \langle (1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n) \rangle$$

ג. הראו כי $S_n = \langle (1,2), (1,2,\ldots,n) \rangle$ על ידי נוסחת ההצמדה ב-S_n.

ד. (אתגר) הראו כי אם σ הוא מחזור מאורך n כלשהו, ואם τ חילוף כלשהו, אזי מתקיים $S_n = \langle \tau, \sigma \rangle$. זו למעשה הכללה של השאלה, המראה כי יכולנו לבחור כל מחזור מאורך n וכל חילוף, ולא רק את אלו הנתונים.

בהצלחה!