

תרגיל מספר 2

תאריכי הגשה: לקבוצה של: יום ג': 2.11, יום ד': 3.11, יום ה': 4.11.

נא לכתוב על התרגילים שם, ת.ז. ומספר קבוצה!

1. בדקו עבור כל קבוצה עם פעולה היא חבורה למחצה, מונואיד או חבורה ואם הפעולה היא אבלית או לא.

(א) $(Z, -)$ (קבוצת המספרים השלמים עם פעולת החיסור)

(ב) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in R, a^2 + b^2 > 0 \right\}$ עם פעולת כפל מטריצות.

(ג) הקבוצה $H = \{(x, y) \in Z \times Z \mid x^2 - 3y^2 = 1\}$ עם הפעולה $(x, y) * (z, w) = (xz + 3yw, xw + yz)$.

(ד) $(R \setminus Q, +)$ (קבוצת המספרים האי-רציונליים עם פעולת החיבור).

(ה) $(R, *)$ (קבוצת המספרים הממשיים עם הפעולה * המוגדרת כך: $a * b = a^2 - ab$)

2. תהי B תת-קבוצה של R. נסמן $B' = \{s+tx : s, t \in B\}$ ויהי $A = B' \setminus \{0\}$, עם כלל הכפל $(s+tx)(u+vx) = (su+2vt) + (sv+tu)x$. עבור $B = Q, Z_5, Z_7$. האם היא חבורה כפולית? שימו לב: כש- $B = Z/5Z$ or $Z/7Z$ אזי את הביטויים מצד ימין (בהגדרת כלל הכפל) אנו ניקח mod 7 או mod 5 בהתאמה. (רמז: למה ניתן לחשוב על x כעל " $\sqrt{2}$ "?)

3. נסמן ב- R את קבוצת המספרים הממשיים. תהי

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & A & B \\ 0 & 1 & C \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid A, B, C \in R \right\}$$

הוכח ש- G היא חבורה ביחס לכפל מטריצות. האם היא אבלית?

4. תהיינה $(G, \cdot), (H, *)$ חבורות. נגדיר פעולה + על המכפלה הקרטזית $G \times H$ כדלהלן:

$$(g_1, h_1) + (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 * h_2)$$

הוכיחו כי $G \times H$ היא חבורה תחת פעולה זו.

5. נסתכל על הקבוצה $A = R \cup \{\infty\}$. נגדיר את הפעולה $a * b = \frac{a+b}{1-ab}$ (כשמספר לחלק ל- 0 שווה ל- ∞ , ו- $\infty * b = b * \infty = -1/b$). האם $(A, *)$ היא חבורה למחצה? מונואיד? חבורה?

6. יהי F שדה, ונסתכל על $V = F^N = \{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in F\}$ (ז"א – האיברים ב-V הם וקטורים אינסופיים). נסמן

$$\text{Hom}(V) = \{ T: V \rightarrow V : T \text{ is a linear transformation} \}$$

(א) הוכיחו ש- $\text{Hom}(V)$ עם פעולת ההרכבה היא מונואיד.

(ב) יהיו

$$U: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2, \dots)$$

$$D: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$$

שני איברים ב- $\text{Hom}(V)$. האם ל-D או ל-U יש הפיך מימין או משמאל?