תרגיל בית 12

1. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת משפט הסנדוויץ':
   א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1sin(1)+2sin(2)+....+nsin(n)}{n^3}\right)$.
   ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+...+\frac{1}{n^2+n}\right)$.
   ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+(-1)^n+9^n}$.

2. הוכיחו כי הסדרות הרקורסיביות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולותיהן:
   א. סדרה המוגדרת ע"י $a_1=1\ ,a_{n+1}=\sqrt{3a_n}$.
   ב. סדרה המוגדרת ע"י $a_1=10\ ,a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$.
   ג. סדרה המוגדרת ע"י $a_1=1\ ,a_{n+1}=\frac{1}{3}\left(a_n+4\right)$.
   ד. סדרה המוגדרת ע"י $a_1=1\ ,a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$.

3. עבור הסדרות הבאות מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרה:
   א. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(-1)^n+\frac{1}{n}$.
   ב. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

4. תהיינה $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ו- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ שתי סדרות נתונות, הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   א. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ו- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה חסומה אזי $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$.
   ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ או $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.
   ג. אם $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת אז $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ו- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסות.
   ד. אם $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרה חסומה אזי $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ היא סדרת קושי.
   ה. אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.
   ו. אם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$.