אנליזה מתקדמת למורים - תרגול 5

18 בנובמבר 2020

1 סדרות

תרגילים:

1. תהיינה r_n, θ_n שתי סדרות ממשיות. ונתבונן בסדרה מרוכבת $z_n = r_n \text{cis}\theta_n$. הוכיחו שאם $r_n \to 0$ אז $z_n \to 0$.
פתרון: נלך לפי הגדרה: באופן כללי עבור סדרה w_n נאמר שהיא שואפת ל-L אם $|w_n - L| \to 0$. אצלנו, הגבול הרצוי הוא 0, לכן נבדוק האם $|z_n - 0| \to 0$:
$$|z_n - 0| = |z_n| = |r_n \text{cis}\theta_n| = r_n \to 0$$
הערה: בעצם מה שיצא לנו, זה שכאשר הערך המוחלט של איברי הסדרה שואף לאפס, אז הסדרה עצמה גם שואפת לאפס.

2. נסמן $z = \frac{2}{5}\text{cis}\frac{\pi}{6}$. נגדיר את הסדרה $z_n = z^n$. הוכיחו: $z_n \to 0$.
פתרון: נשים לב שהסדרה היא בעצם $z_n = \left(\frac{2}{5}\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^n \text{cis}\frac{\pi n}{6}$. כיון ש-$\left(\frac{2}{5}\right)^n \to 0$, מתרגיל קודם נקבל $z_n \to 0$.

3. (תהי z_n סדרה, ויהי $r \in \mathbb{R}^+$ כך ש- $|z_n| \to r$. האם בהכרח z_n מתכנסת?
פתרון: לא. ניקח סדרה שערכיה המוחלטים קבועים תמיד להיות 1, אך היא מתבדרת. למשל:
$$z_n = i^n$$
כאן מתקיים $|z_n| = 1 \to 1$ אבל הסדרה מחזורית בערכים $\{i, -1, -i, 1\}$ ולכן לא מתכנסת.)

2 פונקציות

אנחנו מדברים על פונקציות $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. לדוגמא:
$$f(z) = z^2$$

$$f(x+yi) = y + xi$$

ראיתם שאפשר להתייחס לפונקציה מרוכבת כסכום פונקציות בשני משתנים $U(x,y), V(x,y)$ ואז

$$f(x+yi) = U(x,y) + V(x,y)i$$

2.1 רציפות

פונקציה f תיקרא רציפה ב־ z_0 אם לכל סדרה $z_n \to z_0$ מתקיים $f(z_n) \to f(z_0)$.
פונקציה תיקרא רציפה אם היא רציפה בכל נקודה.

הערה: לרוב לא משתמשים בהגדרה, אלא בכללי אריתמטיקה.

תרגילים: בדקו רציפות (לפי נקודות) של הפונקציות הבאות:

1. $f(z) = |z|$
נראה לפי הגדרה. תהי $z_n \to z_0$ ונבדוק האם $f(z_n) \to f(z_0)$:

$$|f(z_n) - f(z_0)| = ||z_n| - |z_0|| \underset{*}{\leq} |z_n - z_0| \to 0$$

$*$: ניזכר באי־שיוויון המשולש ההפוך שאומר $||w_1| - |w_2|| \leq |w_1 - w_2|$.
דרך אחרת, נלך לפי פירוק לפונקציות U, V: נרשום $z = x + yi$, ולכן:

$$f(z) = f(x+yi) = |x+yi| = \sqrt{x^2+y^2} = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=a} + \underbrace{0}_{=b} i$$

נקבל:

$$U(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, V(x,y) = 0$$

מבחינת רציפות: כמובן, פונקציית האפס רציפה, ולכן V רציפה. לפי אריתמטיקה, גם U רציפה כשורש של פונקציות רציפות וחיוביות. בסה"כ, כיון ש־ U, V רציפות אז גם $f = U + iV$ רציפה לפי המשפט שאם U, V רציפות אז f רציפה.

2. $f(z) = \frac{z+2\overline{z}}{z\overline{z}+2}$.
פתרון: הפונקציה z רציפה כי היא הזהות. הפונקציה $\overline{z}$ רציפה ־ הוכח בהרצאה. הפונקציה $z\overline{z} = |z|^2$ רציפה כי ראינו בתרגיל 1 ש־ $|z|$ רציפה ולכן גם בריבוע. נשים לב גם שהמכנה תמיד חיובי. בסה"כ f רציפה לפי אריתמטיקה.

3. $f(z) = Im(z) + Re(z)i$

פתרון: בעצם הפונקציה היא $f(x+yi) = y + xi$. כאן נקבל:

$$U(x,y) = Re(y+xi) = y$$

$$V(x,y) = Im(y+xi) = x$$

והפונקציה היא:

$$f(x+yi) = U(x,y) + iV(x,y) = y + xi$$

כאן הפונקציות U, V רציפות כי הן בעצם "בחירת משתנה". ואז $f = U + Vi$ רציפה לפי המשפט.

4. $f(z) = \frac{z^2-2z+1}{z^2+1}$

פתרון: $f(z) = \frac{(z-1)^2}{(z+i)(z-i)}$, ולכן היא לא מוגדרת ב־ $z = \pm i$. בשאר הנקודות (לכל $z \neq \pm i$) יש רציפות לפי אריתמטקיה, כי זו מנה של פולינומים (והמכנה שונה מאפס).

5. $f(x+yi) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - yi & x \neq 0 \\ 1 - yi & x = 0 \end{cases}$.

פתרון: נפצל את הפונקציה: $f(x+yi) = U + iV$ כאשר:

$$U(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$V(x,y) = -y$$

ניזכר שהפונקציה $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 0$, ולכן הפונקציה U רציפה לכל (x,y) . בנוסף כמובן שהפונקציה V רציפה בכל נקודה. בסה"כ f רציפה.