תרגול מס' 7

19 במאי 2016

תקציר

משפט הדיוורגנט

1 משפט הדיברגנט

נזכיר מה הוא דיברגנט.

הגדרה 1. יהי $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ שדה וקטורי. ($F=(F_1,\ldots,F_n)$) הדיברגנט של F הינו

$$\mathbf{div}F=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\ldots\frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

דוגמה 1. הדיברגנט של השדה $\frac{1}{3}(x,y,z)$ הינו $\frac{1}{3}(1+1+1)=3$.
ננסח את משפט הדיברגנט.

משפט 1. יהי V גוף כך שהשפה שלו, $S=\partial V$ הוא משטח חלק וסגור בעל נורמל יחידה חיצוני N. אם השדה F גזיר ברציפות ב V אזי מתקיים

$$\int_S F\cdot N\mathbf{d}S=\int_V \mathbf{div}F\mathbf{d}V$$

ב $\mathbb{R}^3$, אם נסמן את השדה על ידי $F=(P,Q,R)$ המשפט מקבל את הצורה

$$\iint_S P\mathbf{d}y\mathbf{d}z+Q\mathbf{d}z\mathbf{d}x+R\mathbf{d}x\mathbf{d}y=\iiint\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z.$$

הערה 1. מבחינה ראיונית המשפט דומה למשפט גרין וניתן להשתמש בטריקים דומים (למשל לסגור את המשטח).

הערה 2. בדומה למשפט גרין, שם חישבנו את הנפח של הקבוצה V על ידי

$$Vol(V)=\int_{\partial V}-\frac{1}{2}y\mathbf{d}x+\frac{1}{2}x\mathbf{d}y$$

אפשר לפתח נוסחה דומה עבור קבוצה ב $\mathbb{R}^3$, דהיינו:

$$Vol(V)=\iint\frac{x}{3}\mathbf{d}y\mathbf{d}z+\frac{y}{3}\mathbf{d}z\mathbf{d}x+\frac{z}{3}\mathbf{d}x\mathbf{d}y$$

תרגיל 1. חשבו את האינטגרל

$$\iint_S F\cdot N\mathbf{d}S$$

כאשר $F=\left(4x,-2y^2,z^2\right)$, S הוא המשטח הסגור על ידי $z=3,z=0,x^2+y^2=4$ (מעטפת של גליל) עם הנורמל החיצוני.

פתרון: לפי משפט הדיברגנט נקבל:

$$\iint_S F\cdot N\mathbf{d}S=\iiint_V \mathbf{div}F\mathbf{d}V$$

כאשר V הוא הגליל ש S הוא השפה שלו. מתקיים:

$$\mathbf{div}F=4-4y+2z$$

ולכן

$$.\iint_S F\cdot N\mathbf{d}S=\iiint_V 4-4y+2z\mathbf{d}x\mathbf{d}y\mathbf{d}z$$

נעבור לקואורדינטות גליליות:

$$\begin{aligned} z &= z \\ x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

כאשר $0\le z\le 3$, $0\le r\le 2$, $0\le\theta\le 2\pi$. יעקוביאן הינו r והאינטגרל הופך

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \mathbf{d}z\int_0^2 \mathbf{d}r\int_0^{2\pi} r\left(4-4\sin\theta+2z\right)\mathbf{d}\theta \\ = & \int_0^3 \mathbf{d}z\int_0^2 2\pi\left(4+2z\right)\mathbf{d}r \\ = & \int_0^3 \left(16\pi+8\pi z\right)dz \\ = & 48\pi+36\pi=84\pi \end{aligned}$$

תרגיל 2. חשבו את האיטנגרל

$$\iint_S F\cdot N\mathbf{d}S$$

כאשר

$$\begin{aligned} S &= |3x-2y+z|+|2x+3y-z|+|x-3y+z|=1 \\ F &= (3x-2y+1,2x+3y-z,x-3y+z) \end{aligned}$$

ו N הוא הנורמל החיצוני.

פתרון: נחשב את $\mathbf{div}F$ ונקבל $\mathbf{div}F=7$. נפעיל את משפט הדיברגנט. האיטנגרל המקורי הופך ל

$$\iiint_V 7\mathbf{d}V$$

כאשר $V=\{(x,y,z):|3x-2y+z|+|2x+3y-z|+|x-3y+z|\le 1\}$.נבצע החלפת משתנים:

$$\begin{aligned} t &= 3x-2y+z \\ s &= 2x+3y-z \\ u &= x-3y+z \end{aligned}$$

ונקבל בקואורדינטות החדשות

$$V'=\{(t,s,u):|t|+|s|+|u|\le 1\}$$

על מנת לחשב את הדטרמיננטה של מטריצת המעבר מ (t,s,u) ל (x,y,z) נחשב את מטריצת המעבר מ (x,y,z) ל (t,s,u) וניקח את ההופכית. נקבל

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial z} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

ניקח ערך מוחלט ונקבל

$$\frac{7}{3}\iiint_{V'}\mathbf{d}t\mathbf{d}s\mathbf{d}u=\frac{56}{3}\iiint_{V''}\mathbf{d}t\mathbf{d}s\mathbf{d}u$$

כאשר $V''=\left\{(t,s,u)\,\middle|\,t+s+u\le 1;0\le t,s,u\right\}$(ניתן לעשות את המעבר כי התחום סימטרי ביחס לצירים).
נחשב את האינטגרל

$$\begin{aligned} \iiint_{V''}\mathbf{d}t\mathbf{d}s\mathbf{d}u &= \int_0^1\int_0^{1-t}\int_0^{1-t-s}\mathbf{d}u\mathbf{d}s\mathbf{d}t \\ &= \int_0^1\int_0^{1-t}(1-t-s)\,\mathbf{d}s\mathbf{d}t \\ &= \int_0^1\frac{1}{2}(1-t)^2\,\mathbf{d}t \\ &= -\frac{1}{6}(1-t)^3\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

נכפיל ונקבל $-\frac{56}{9}$

תרגיל 3. חשבו את האינטגרל המשטחי מסוג שני של השדה $F=\left(3xy^2,-y^3-x,2z\right)$ דרך המשטח $z=\sqrt{x^2+y^2}$ עם הנורמל החיצוני. $0\le z\le 1$

פתרון: נסמן ב S את המשטח. נשים לב ש S אינו משטח סגור ולכן נוסיף לו את המשטח $S_1:x^2+y^2\le 1, z=1,$ ונחשב את הערך של האינטגרל על $S\cup S^1$ בעזרת משפט הדיוורגנט. מתקיים:

$$\mathbf{div}F=3y^2-3y^2+2=0$$

ולפי משפט הדיברגנט נקבל

$$\iint_{S\cup S_1} F\cdot N\mathbf{d}\left(S\cup S_1\right)=2\iiint_V \mathbf{d}V$$

כאשר V הוא הקונוס החסום על ידי $S\cup S_1$. על פי הנוסחא לשטח של קונוס נקבל

$$2\iiint_V \mathbf{d}V=\frac{2}{3}\pi.$$

נחשב את האינטגרל $\iint_{S_1} F\cdot N\mathbf{d}S_1$. נחבר פרמטרריזציה

$$\phi\left(x,y\right)=\left(x,y,1\right);x^2+y^2\leq 1.$$

נורמל החיצוני נתון על ישי $(0,0,1)$. ולכן

$$\iint_{S_1} F\cdot N\mathbf{d}S_1=\iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(3xy^2,-y^3-x,2\right)\cdot\left(0,0,1\right)\mathbf{d}x\mathbf{d}y=2\pi$$

נחסר ונקבל

$$\iint_S F\cdot N\mathbf{d}s=\iint_{S\cup S_1} F\cdot N\mathbf{d}\left(S\cup S_1\right)-\iint_{S_1} F\cdot N\mathbf{d}S_1=\frac{2}{3}\pi-2\pi=-\frac{4}{3}\pi$$