

תרגיל בית 11

1. התסתכלו על הפונקציה הבאה המוגדרת על $[-1,1]$:

$$f = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- א. האם הפונקציה גזירה?
- ב. האם הפונקציה רציפה ליפשיץ?
- ג. האם לפונקציה השתנות חסומה?

2. נניח f הינה פונקציה רציפה על $[0,1]$ ו f רציפה בהחלט על $(a,1]$ לכל $a \in (0,1)$. האם f בהכרח רציפה בהחלט על $[0,1]$? אם בנוסף f הינה בעלת השתנות חסומה ב $[0,1]$ האם אז f הינה רציפה בהחלט על $[0,1]$? אם לא, תנו דוגמא נגדית.

3. נניח f הינה רציפה בהחלט על $[0,1]$ ולכל $A \subseteq [0,1]$ נגדיר $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. הראו כי אם A הינה בעלת מידת לבג 0 אזי $f(A)$ בעלת מידת לבג 0.