פתרון תרגיל 10 – חשבון אינפיניטסימלי 2 למדעי המחשב

1. א. מחוץ לראשית הצירים הפונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות אלמנטריות רציפות.
נבדוק רציפות ב־$(0,0)$: אם נבחר את המסלול $y = x$ נקבל

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \neq f(0)$$

ומכאן שהפונקציה לא רציפה ב־$(0,0)$.

ב. מחוץ ל־$(0,0)$ ניתן לגזור לפי כללי הגזירה הרגילים:

$$f'_x(x,y) = \frac{\sin y\cdot(x^2+y^2) - 2x^2\sin y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\sin y\cdot(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{x\cos y\cdot(x^2+y^2) - 2y\cdot x\sin y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x\cos y}{x^2+y^2} - \frac{2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}$$

ב־$(0,0)$ יש לגזור עפ"י ההגדרה:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h\sin 0}{h^2+0^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \;\Rightarrow\; f'_x(0,0)=0$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0\cdot\sin h}{0^2+h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0 \;\Rightarrow\; f'_y(0,0)=0$$

בסה"כ נקבל שהנגזרות החלקיות קיימות בכל נקודה:

$$f'_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin y\cdot(y^2-x^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f'_y(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\cos y}{x^2+y^2} - \dfrac{2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

2. א. הפונקציה: $f(x,y) = x^3+y^3+3x^2-6y^2$. נמצא נקודות קריטיות:

$$\begin{matrix} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} 3x^2+6x=0 \\ 3y^2-12y=0 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} 3x(x+2)=0 \\ 3y(y-4)=0 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \begin{matrix} x=0,\; x=-2 \\ y=0,\; y=4 \end{matrix}$$

כלומר הנקודות הקריטיות הן $(0,0),\ (0,4),\ (-2,0),\ (-2,4)$. נחשב את ההסיאן:

$$H(f)_{(x,y)}=\begin{pmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & 6y-12 \end{pmatrix}$$

ובנקודות החשודות:

$$H(f)_{(0,0)}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta=-6\cdot 12<0 \Rightarrow \textit{saddle point}$$

$$H(f)_{(0,4)}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta=6\cdot 12>0,\ f''_{xx}=6>0 \Rightarrow \textit{min}$$

$$H(f)_{(-2,0)}=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta=6\cdot 12>0,\ f''_{xx}=-6<0 \Rightarrow \textit{max}$$

$$H(f)_{(-2,4)}=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta=-6\cdot 12<0 \Rightarrow \textit{saddle point}$$

לסיכום: $(0,0)$ נקודת אוכף, $(0,4)$ מינימום מקומי, $(-2,0)$ מקסימום מקומי, $(-2,4)$ נקודת אוכף.

ב. הפונקציה: $f(x,y)=(x-1)^2-2y^2$. נמצא נקודות קריטיות:

$$\begin{matrix} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} 2(x-1)=0 \\ -4y=0 \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} x=1 \\ y=0 \end{matrix}$$

כלומר יש נקודה קריטית אחת, $(1,0)$. נחשב את ההסיאן:

$$H(f)_{(x,y)}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

ובפרט

$$H(f)_{(1,0)}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta=-8<0 \Rightarrow \textit{saddle point}$$

כלומר $(1,0)$ נקודת אוכף.

ג. הפונקציה: $f(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$. נמצא נקודות קריטיות:

$$\begin{matrix} f'_x=0 \\ f'_y=0 \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} 4x^3-4x+4y=0 \\ 4y^3-4y+4x=0 \end{matrix}$$

נחבר את שתי המשוואות ונקבל: $4x^3+4y^3=0 \Leftarrow x^3+y^3=0 \Leftarrow x^3=-y^3 \Leftarrow x=-y$. נציב זאת במשוואה הראשונה ונקבל:

$$4x^3-4x-4x=0 \Rightarrow 4x(x^2-2)=0 \Rightarrow x=0,\ x=\sqrt{2},\ x=-\sqrt{2}$$

ולכן הנקודות הקריטיות הן: $(0,0),\ (\sqrt{2},-\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2},\sqrt{2})$. נחשב את ההסיאן:

$$H(f)_{(x,y)}=\begin{pmatrix} 12x^2-4 & 4 \\ 4 & 12y^2-4 \end{pmatrix}$$

$$H(f)_{(\pm\sqrt{2},\mp\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = 20^2 - 4^2 > 0,\ f''_{xx} = 20 > 0 \Rightarrow min$$

$$H(f)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4^2 = 0$$

כלומר $\Delta = 0$ ויש להכריע בדרך אחרת.

$f(0,0) = 0$, נוכיח כי זו נקודת אוכף ע"י שנראה שבכל סביבה של $(0,0)$, קטנה ככל שתהיה, הפונקציה מקבלת גם ערכים חיוביים וגם ערכים שליליים, ולכן $(0,0)$ לא מינימום מקומי ולא מקסימום מקומי. יהי $\varepsilon > 0$ קטן כרצוננו. נתבונן בעיגול ברדיוס ε סביב $(0,0)$, ונבחר $0 < x_0 < \min\{1, \varepsilon\}$. אז

$$f(x_0, 0) = x_0^4 - 2x_0^2 = x_0^2 \cdot (x_0^2 - 2) < 0$$

ואילו

$$f(x_0, x_0) = x_0^4 + x_0^4 - 2x_0^2 + 4x_0^2 - 2x_0^2 = 2x_0^4 > 0$$

לסיכום: $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ מינימום מקומי, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ מינימום מקומי, $(0,0)$ נקודת אוכף.

3. הפונקציה $f(x,y) = \sqrt{3}xy + x^2$ רציפה בתחום הסגור והחסום $x^2 + y^2 \le 1$, ולכן מקבלת בו מינימום ומקסימום גלובליים.

אם ערכי הקיצון מתקבלים בתוך התחום $x^2 + y^2 < 1$ אז מדובר בקיצון מקומי. נמצא את הנקודות הקריטיות:

$$\begin{matrix} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \sqrt{3}y + 2x = 0 \\ \sqrt{3}x = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

כלומר $(0,0)$ חשודה לקיצון. כעת נבדוק את שפת התחום: $x^2 + y^2 = 1$, בעזרת כופלי לגרנז':

$$L(x,y,\lambda) = \sqrt{3}xy + x^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

נקבל את המערכת:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}y + 2x + 2\lambda x = 0 \\ \sqrt{3}x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

שפתרונה $\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (עבור $\lambda = \frac{1}{2}$), $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ (עבור $\lambda = -\frac{3}{2}$).

כל שנותר הוא להציב את כל הנקודות החשודות ולהשוות בין ערכי הפונקציה:

$$f(0,0) = 0,\ f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2},\ f(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{1}{2},\ f(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$$

ומכאן ש־$\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ מקסימום גלובלי, הערך המקסימלי $\frac{3}{2}$, $\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ מינימום גלובלי, הערך המינימלי $-\frac{1}{2}$.

4. הפונקציה $f(x,y) = xy + \dfrac{x}{2}$ רציפה בתחום הסגור המוגבל ע"י הישרים $x=0,\ y=0$ ו־$y = 4 - x$, לכן ממשפט ויישטראס היא מקבלת מקסימום (ומינימום) גלובלי שם.

אילו הערך המקסימלי היה מתקבל בתחום $\{(x,y)\colon x > 0,\ 0 < y < 4 - x\}$, כלומר בנקודה פנימית של המשולש, אז נקודה זו היא מקסימום מקומי. אבל הגרדיאנט $\nabla f = (y + \dfrac{1}{2}, x)$ מתאפס רק בנקודה $(0, -\frac{1}{2})$ שאינה בתחום. לכן אין קיצון מקומי בתוך התחום, ונסיק שהמקסימום מתקבל על השפה. השפה מורכבת משלושה קטעים. נבדוק עבור כל אחד מהם בנפרד:

הקטע הראשון: $\{(0,t)\colon 0 \le t \le 4\}$ ובו: $f(0,t) = 0$.

הקטע השני: $\{(t,0)\colon 0 \le t \le 4\}$, ובו: $f(t,0) = \dfrac{t}{2}$, והמקסימום מתקבל בקצה הימני $t = 4$: $f(4,0) = 2$.

הקטע השלישי: $\{(t, 4-t)\colon 0 \le t \le 4\}$, ובו: $f(t, 4-t) = t(4-t) + \dfrac{t}{2} = -t^2 + 4.5t$.

חקירה פשוטה מראה שהמינימום מתקבל בנקודה $t = 2.25$: $f(2.25, 1.75) = 5\dfrac{1}{16}$. הערכים בקצוות: $f(0,4) = 0,\ f(4,0) = 2$.

בסה"כ: הערך המקסימלי הוא $5\dfrac{1}{16}$, והוא מתקבל בנקודה $(2.25, 1.75)$.