

תרגיל בית 8

שאלה 1

היעזר במבחן דריכלה וענה על הסעיפים הבאים:

סעיף א

לאילו ערכי p האינטגרלים הבאים מתכנסים:

$$1. \int_1^{\infty} \frac{e^{\sin x} \sin 2x}{x^p} dx \quad 2. \int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^p \sin x}{x} dx \quad 3. \int_1^{\infty} \frac{\sin(x^3)}{x^p} dx \quad 4. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\tan x|^\alpha dx$$

סעיף ב

הוכח שהאינטגרלים הלא אמיתיים הבאים מתכנסים:

$$1. \int_1^{\infty} \cos(x^2 + 1) dx \quad 2. \int_1^{\infty} \frac{\cos^3 x}{x} dx$$

פתרון שאלה 1

סעיף א

$$. g(x) = \frac{1}{x^p} ; f(x) = e^{\sin x} \sin 2x$$

לכל $p > 0$ פונקציה $g(x)$ מונוטונית יורדת ו $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

נבדוק את התנאים של מבחן דריכלה בשביל פונקציה $f(x)$.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b e^{\sin x} \sin 2x dx \right| = \left\{ \begin{array}{l} \text{הצבה} \\ \sin x = t \end{array} \right\} = 2 \left| \int_a^{\sin b} e^t dt \right| \leq 2 \int_a^1 e^t dt < 2e = K$$

תנאים של מבחן דריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס.

סעיף א2

$$. \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{ ו } g(x) \text{ מונוטונית יורדת. } g(x) = \frac{(\ln x)^p}{x} ; f(x) = \sin x$$

$$g'(x) = \frac{(\ln x)^{p-1}}{x^2} (p - \ln x)$$

$g'(x) < 0$ לכל $x > e^p$, לכן פונקציה $g(x)$ מונוטונית יורדת החל מ $x > e^p$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ לפי כלל לופיטל.

סעיף א3

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x^3)}{x^p} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{הצבה} \\ t = x^3 \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{p+2}{3}}} dt$$

$$. g(t) = \frac{1}{t^{\frac{p+2}{3}}} ; f(t) = \sin t \text{ נסמן}$$

$g(t)$ מונוטונית יורדת ו $\lim_{x \rightarrow \infty} g(t) = 0$ לכל $p > -2$.

לכן אינטגרל מתכנס לפי מבחן דריכלה.

סעיף א4

סעיף א

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\tan x|^\alpha dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |\tan x|^\alpha dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\tan x|^\alpha dx$$

עבור $\alpha > 0$ הפונקציה $f(x) = |\tan x|^\alpha$ לא חסומה בסביבת הנקודות $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$.

נבדוק האם $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |\tan x|^\alpha dx$ מתכנס.

הפונקציה $f(x) = |\tan x|^\alpha$ אי שלילית, ולכן ניתן להשתמש במבחן השוואה הגבולי.

$$. \text{נסמן } g(x) = \frac{1}{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^\alpha}$$

$$. \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{|\sin x|^\alpha \left(x + \frac{\pi}{2}\right)^\alpha}{|\cos x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^\alpha}{|\cos x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^\alpha}{\left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|^\alpha} = 1$$

הפונקציות $f(x), g(x)$ מתכנסות ומתבדרות ביחד.

$$. \text{מתכנס עבור } 0 < \alpha < 1 \text{ ומתבדר כאשר } 1 \leq \alpha$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^\alpha} dx$$

באותו אופן ניתן להראות שהאינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\tan x|^\alpha dx$ מתכנס עבור $0 < \alpha < 1$ ומתבדר כאשר $1 \leq \alpha$.

$$. \text{הפעם נשתמש ב } g(x) = \frac{1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^\alpha}$$

עבור $\alpha < 0$ הפונקציה $f(x) = |\tan x|^\alpha$ לא חסומה בסביבת הנקודות 0 .

נבדוק האם $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |\tan x|^\alpha dx$ מתכנס.

הפונקציה $f(x) = |\tan x|^\alpha$ אי שלילית, ולכן ניתן להשתמש במבחן השוואה הגבולי.

$$. \text{נסמן } g(x) = |x|^\alpha$$

$$. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|^\alpha}{|\cos x|^\alpha |x|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|^{-\alpha}}{|\sin x|^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} = 1$$

הפונקציות $f(x), g(x)$ מתכנסות ומתבדרות ביחד.

$$. -1 \geq \alpha \text{ מתכנס עבור } -1 < \alpha < 0 \text{ ומתבדר כאשר } -1 \geq \alpha$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 |x|^\alpha dx$$

באותו אופן ניתן להראות שהאינטגרל $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\tan x|^\alpha dx$ מתכנס עבור $-1 < \alpha < 0$ ומתבדר כאשר $-1 \geq \alpha$

(נשתמש באותה פונקציה עזר).

נשים לב שעבור $\alpha = 0$ האינטגרל מתכנס.

סה"כ קיבלנו שהאינטגרל מתכנס עבור $-1 < \alpha < 1$.

מתבדר עבור $\alpha \leq -1 \vee 1 \leq \alpha$.

סעיף ב1

$$\int_1^\infty \cos(x^2 + 1) dx = \int_1^\infty \cos t dt \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{הצבה} \\ x^2 + 1 = t \\ x = \sqrt{t-1} \end{array} \right. = \frac{1}{2} \int_2^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t-1}} dt$$

$$\text{נסמן } g(t) = \frac{1}{\sqrt{t-1}} ; f(t) = \cos t$$

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס.

סעיף ב2

$$\text{נסמן } g(x) = \frac{1}{x} ; f(x) = \cos^3 x$$

$$\left| \int_0^x \cos^3 t dt \right| = \left| \int_0^x (1 - \sin^2 t) d(\sin t) \right| = \left| \left(\sin t - \frac{\sin 3t}{3} \right) \Big|_0^x \right| \leq \frac{4}{3}$$

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס.

שאלה 2

עבור האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים, קבעו האם הם מתכנסים או מתבדרים:

$$\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx \quad \text{ג.} \quad \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx \quad \text{ב.} \quad \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} dx \quad \text{א.}$$

$$\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2-x}} dx \quad \text{ה.} \quad \int_0^\infty \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx \quad \text{ד.}$$

פתרון שאלה 2

סעיף א

נשים לב ש $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} > 0$ לכל $1 \leq x$ ואז ניתן להשתמש במבחן המנה.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad \text{מתכנס.}$$

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} dx \quad \text{מתכנס.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} : \frac{1}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} \cdot x\sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

סעיף ב

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$$

נשים לב ש $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-2x} = -\frac{1}{2}$ האינטגרל $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ הוא אמיתי, ולכן קיים וסופי.

נבדוק התכנסות האינטגרל $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$. מספיק לבדוק האם האינטגרל $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{1-x^2} dx$ מתכנס.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx = [-x \ln x + x]_0^{\frac{1}{2}} = \lim_{a \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + b \ln b - b \right] = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

ז"א האינטגרל $\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx$ מתכנס.

לכל $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ וניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

לכל $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ מתקיים $\frac{-\ln x}{1-x^2} \leq \frac{-4 \ln x}{3}$. מכיון ש $\int_0^{\frac{1}{2}} -\ln x dx$ מתכנס גם $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-4 \ln x}{3} dx$

ממבחן ההשוואה הראשון נקבל ש $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\ln x}{1-x^2} dx$ מתכנס וסה"כ $\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ מתכנס.

סעיף ג

ברור ש $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$ ולכן

$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) > 0$ החל מ x_0 מסוים. לכן מותר להשתמש במבחן ההשוואה

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \sim \frac{1}{x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

האינטגרל $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ מתבדר, לכן גם האינטגרל $\int_1^{\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx$ מתבדר.

סעיף ד

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$$

נבדוק האם $\int_0^1 \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx$ מתכנס.

בקטע $0 \leq x \leq 1$ נקבל ש $\frac{\pi}{4} \leq \arctan \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2}$ ואז $\frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} > 0$ לכל $0 \leq x \leq 1$ וניתן להשתמש במבחן ההשוואה הראשון.

$$\int_0^1 \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx \text{ מתכנס. } \int_0^1 \frac{\pi}{2\sqrt{x}} dx \text{ מתכנס. לכל } 0 \leq x \leq 1 \text{ ז"א גם } \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} < \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_1^\infty \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} dx \text{ מתכנס. נבדוק האם}$$

$$0 < \arctan \frac{1}{x} \leq \frac{\pi}{4} \text{ לכל } 1 \leq x \text{ ואז } \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} > 0 \text{ וניתן להשתמש במבחן המנה.}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \text{ מתכנס. } \frac{\arctan \frac{1}{x}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}} = \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1/\sqrt{x}}$$

נשתמש במשפט לופיטל ונקבל ש

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{-1/x^2} = 1$$

האינטגרל מתכנס.

סעיף ה

$$\int_2^\infty \frac{x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 - x}} dx \text{ תחילה נשים לב שלכל } 2 \leq x \text{ מתקיים } 0 \leq \frac{x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 - x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1 \text{ נשים לב תחילה ש}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 - x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 - x}} \cdot x \sin \frac{1}{x} = 1 \text{ מתבדר. } \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ מתבדר. והאינטגרל שלנו מתבדר.}$$

שאלה 3

עבור האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים, קבעו האם הם מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\cos x} \sin(tx) dx \text{ ב. } \int_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}-1} dx \text{ א.}$$

פתרון שאלה 3

סעיף א

נסמן $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. הפונקציה מונוטונית יורדת, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ופונקציית הנגזרת רציפה בקטע $[2, \infty)$.

נסמן $g(x) = \sin x$.

אז $-1 \leq \cos x \leq 1$ ממשי מתקיים $G(x) = \int_2^x \sin t dt = [\cos t]_2^x = \cos x - \cos 2$

$\int_2^\infty f(x)g(x)dx = \int_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}} dx$ חסומה וכל תנאי משפט דריכלה מתקיימים כלומר האינטגרל

מתכנס.

נשאר לבדוק האם $\int_2^\infty \frac{|\sin x|}{\sqrt{x-1}} dx$ מתכנס או מתבדר.

מכיוון ש $\frac{|\sin x|}{\sqrt{x-1}} \geq 0$ ניתן להשתמש במבחן השוואה הראשון.

נשים לב ש $\sin^2 x \leq |\sin x|$ ואז $\frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{|\sin x|}{\sqrt{x-1}}$. אם נוכיח ש $\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-1}} dx$ מתבדר אז גם

$\int_2^\infty \frac{|\sin x|}{\sqrt{x-1}} dx$ והתשובה תהייה $\int_2^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x-1}} dx$ מתכנס בתנאי.

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

$$\int_2^\infty \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{1}{2} \int_2^\infty \frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{x-1}} dx = \frac{1}{2} \int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx - \frac{1}{2} \int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}} dx$$

נבדוק האם $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ מתכנס או מתבדר.

נשים לב ש $\frac{1}{\sqrt{x-1}} \geq 0$ לכל $2 \leq x$. ניתן להשתמש במבחן השוואה הראשון.

לכל $2 \leq x$ מכיוון ש $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ מתבדר גם $\int_2^\infty \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ מתבדר.

נבדוק האם $\int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}} dx$ מתכנס או מתבדר.

נסמן $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$. הפונקציה מונוטונית יורדת, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ ופונקציית הנגזרת רציפה בקטע $[2, \infty)$.

נסמן $g(x) = \cos 2x$.

ממשי מתקיים $G(x) = \int_2^x \cos 2t dt = [-0.5 \sin 2t]_2^x = -0.5 \sin 2x + 0.5 \sin 4$

אז $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ חסומה וכל תנאי משפט דריכלה מתקיימים כלומר האינטגרל

מתכנס. $\int_2^\infty f(x)g(x)dx = \int_2^\infty \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}} dx$

סה"כ קיבלנו ש $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$ מתבדר ו $\int_2^{\infty} \frac{\cos 2x}{\sqrt{x-1}} dx$ ולכן
 מתבדר והאינטגרל בתרגיל מתכנס בתנאי.

סעיף ב

$$\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\cos x} \sin(tgx) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{הצבה} \\ tgx = t \\ x = \arctgt \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \\ \frac{1}{\cos^2 x} = t^2 + 1 \end{array} \right\} = \int_0^{\infty} \sin t \cdot \frac{\arctgt}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

נסמן $g(t) = \frac{\arctgt}{\sqrt{t^2+1}}$; $f(t) = \sin t$

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \arctgt = \frac{\pi}{2}$ כי $g(t)$ מונוטונית יורדת ל-0

$g(t)$ מונוטונית יורדת החל מ t_0 מסוים כי

$$g'(t) = \frac{\frac{1}{1+t^2} \sqrt{1+t^2} - \arctgt \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t^2+1} = \frac{1-t \arctgt}{(t^2+1)^{3/2}} < 0$$

החל מ t_0 מסוים.

תנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל מתכנס. התכנסות היא בתנאי כי $\int_0^{\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt \sim \int_0^{\infty} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t^2+1}} dt$

גם מתבדר ולכן אינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{|\sin t|}{\sqrt{t^2+1}} dt$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

שאלה 4

קבע לאילו ערכי p האינטגרלים הבאים מתכנסים בהחלט ולאילו ערכי p האינטגרלים מתכנסים בתנאי:

א. $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$. ב. $\int_0^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$

פתרון שאלה 4

סעיף א

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$$

באינטגרל הראשון נשתמש במבחן ההשוואה.

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx \sim \int_0^1 \frac{x^2}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{p-2}} \quad \text{לכן } \sin(x^2) \sim x^2 \quad (x \rightarrow 0)$$

האינטגרל $\int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$ מתכנס אם ורק אם $p < 3$

נחקור את האינטגרל השני $\int_1^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$.

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{הצבה} \\ t = x^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{p+1}{2}}} dt$$

האינטגרל השני בסכום מתכנס בהחלט אם ורק אם $p > 1 \Leftrightarrow \frac{p+1}{2} > 1$.

האינטגרל השני בסכום מתכנס בתנאי אם ורק אם $-1 < p \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{p+1}{2} \leq 1$.

התשובה: האינטגרל $\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x^p} dx$ מתכנס

בהחלט אם ורק אם $1 < p < 3$

בתנאי אם ורק אם $-1 \leq p \leq 1$

סעיף ב

$$\int_0^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx = \int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx + \int_1^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$$

באינטגרל $\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$ נשתמש במבחן ההשוואה.

$$\sin x \sim \ln(x+1) \sim x \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^{p-2}} \quad \text{לכן,}$$

האינטגרל $\int_0^1 \frac{dx}{x^{p-2}}$ מתכנס אם ורק אם $p < 3$

לכן האינטגרל $\int_0^1 \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$ מתכנס אם ורק אם $p < 3$.

נוכיח שהאינטגרל $\int_1^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$ מתכנס לכל $p > 0$ לפי מבחן דיריכלה.

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^p} \quad \text{נסמן}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{x^p}{x+1} - px^{p-1} \ln(x+1)}{x^{2p}} = \frac{\frac{x}{x+1} - p \ln(x+1)}{x^{p+1}} < 0$$

החל מ- x_0 מסוים לכן $g(x)$ מונוטונית יורדת מ- x_0 מסוים.

נוכיח עכשיו שאינטגרל $\int_1^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$ מתכנס בהחלט רק עבור $p > 1$.

אם $p \leq 1$ אזי $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ מתבדר ואז גם $\int_1^{\infty} |\sin x| \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$ מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

התשובה:

האינטגרל $\int_0^{\infty} \sin x \frac{\ln(x+1)}{x^p} dx$ מתכנס

בהחלט אם ורק אם $1 < p < 3$

בתנאי אם ורק אם $0 < p \leq 1$