## הרצאה 3

שיעור שעבר ראינו הגדרה של איחוד וחיתוך בין שתי קבוצות.
השיעור נתחיל עם הגדרה עבור איחוד וחיתוך של יותר משתי קבוצות.

הגדרנו איחוד של שתי קבוצות $A,B$ באופן הבא: $A\cup B=\{x\in U: x\in A\vee x\in B\}$.
אם נסתכל על שלוש קבוצות $A,B,C$ אז באופן טבעי איבר נמצא ב $A\cup B\cup C$ אם ורק אם קיימת קבוצה מתוך שלושת הקבוצות שהאיבר נמצא בה.
כעת נרחיב את ההגדרה עבור $n$ קבוצות:

**<u>איחוד כללי (מספר סופי של קבוצות)</u>**

יהיו $A_1,\dots,A_n$ קבוצות. $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\in U: x\in A_i$ כך ש $1\le i\le n$ קיים $\}$.

**<u>דוגמה</u>**

$A_1=\{1,2,3\},A_2=\{1,2,8\},A_3=\{1,7,8\}\Rightarrow\bigcup_{i=1}^{3}A_i=\{1,2,3,7,8\}$.

שימו לב $3\in\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ מכיוון שקיים $i=1$ כך ש $3\in A_i$.

**<u>הערה</u>**

אם נתבונן נתבונן במשפחת הקבוצות $A_k=\{-k\}$ כאשר $k$ מספר טבעי הגדרת האיחוד לא תתאים למקרה הזה. לכן יש צורך להגדיר את האיחוד באופן שונה.
נתבונן בקבוצת האינדקסים – במקרה שלנו קבוצת האינדקסים היא $\mathbb{N}$ ואז נאמר שאיבר נמצא באיחוד אם ורק אם קיים איבר $i$ שבקבוצת האינדקסים כך שהאיבר נמצא ב $A_i$.
למשל: $-11$ נמצא באיחוד מכיוון שקיים מספר טבעי $11$ כך ש $-11\in A_{11}$, אבל $11$ לא נמצא בקבוצת האיחוד מכיוון שלא קיים מספר טבעי $k$ שעבורו $11\in A_k$.
אם היינו מגדירים את משפחת הקבוצות באופן הבא: $A_k=\{-k\}$ כאשר $k$ הוא מספר שלם היינו מקבלים ש $11$ כן נמצא באיחוד, ולכן יש חשיבות רבה לקבוצת האינדקסים.

**<u>איחוד כללי (לא בהכרח מספר סופי של קבוצות)</u>**

תהיי $I$ קבוצה (קבוצת אינדקסים) ותהיי $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות.
$\bigcup_{i\in I}A_i=\{x\in U: x\in A_i$ כך ש $i\in I$ קיים $\}$.

**<u>דוגמאות</u>**

1. לכל $k\in\mathbb{N}$ תהיי $A_k=[-k,k]$, אז $\bigcup_{k\in N}A_k=\mathbb{R}$.
2. לכל $k\in 2\mathbb{N}$ תהיי $A_k=\{-k,k\}$ אז $\bigcup_{k\in N}A_k=2\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

**<u>חיתוך כללי (מספר סופי של קבוצות)</u>**

יהיו $A_1,\dots,A_n$ קבוצות. $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x\in U: x\in A_i$ - $1\le i\le n$ לכל $\}$.

**<u>דוגמה</u>**

$A_1=\{1,2,3\},A_2=\{1,2,4,5\},A_3=\{1,2,6\},A_4=\{1,2,4\}\Rightarrow\bigcap_{i=1}^{4}A_i=\{1,2\}$.

שימו לב: $\bigcap_{i=1}^{4} A_i \ni 1$ מכיוון ש $1 \in A_i$ לכל $1 \le i \le 4$.

**<u>חיתון כללי (לא בהכרח מספר סופי של קבוצות)</u>**

תהיי $I$ קבוצה (קבוצת אינדקסים) ותהיי $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות.

$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in U : x \in A_i$ לכל $i \in I\}$.

**<u>דוגמה</u>**

לכל $k \in N$ $A_k = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$. אז $\bigcap_{k\in N} A_k = \{0\}$.

**<u>קבוצת החזקה</u>**

עבור קבוצה כלשהי $A$ נגדיר קבוצה חדשה שכל איבר שייך לה אם ורק אם הוא תת קבוצה של הקבוצה $A$.

**<u>דוגמה</u>**

$A = \{1,2\}$ אז הקבוצה החדשה תהייה $\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ שימו לב שכל איבר בקבוצה הוא תת קבוצה של $A$.

**<u>הגדרה</u>**

$P(A) = \{B : B \subseteq A\}$ היא קבוצת החזקה של $A$.

**<u>דוגמאות</u>**

1. $A = \phi \Rightarrow P(A) = \{\phi\}$.
2. $A = \{1\} \Rightarrow P(A) = \{\phi, 1\}$.

**<u>משפט</u>**

אם $|A| = n$ אז $|P(A)| = 2^n$.

**<u>הוכחה</u>**

נוכיח באינדוקציה על $n$.

אם $|A| = 0$ אז $A = \phi$ וקבוצת החזקה היא $P(A) = \{\phi\}$ ולכן מספר האיברים בקבוצת החזקה הוא אחד והטענה נכונה במקרה זה.

נניח שאם $|A| = n$ אז $|P(A)| = 2^n$.

נבדוק את מספר האיברים בקבוצת החזקה של $A_1 = A \cup \{b\}$ כאשר $b \notin A$.

אם $B \subseteq A$ אז $B \subseteq A_1$ מכיוון ש $|P(A)| = 2^n$ נקבל שמספר תתי הקבוצות של מכילות את $\{b\}$ הוא $2^n$.

כעת נבדוק מהו מספר הקבוצות שמכילות את $\{b\}$ ומוכלות ב $A_1$.

נניח ש $\{b\} \in B_1 \subseteq A_1$ אז $B_1 \setminus \{b\} \subseteq A$ ובנוסף $B_1 = B_1 \setminus \{b\} \cup \{b\}$ ז"א שלכל קבוצה שמכילה את $\{b\}$ מתאימה קבוצה אחת ויחידה של מכילה את $\{b\}$ ולכן מספר תתי הקבוצות של $A_1$ שמכילות את $\{b\}$ הוא $2^n$.

סה"כ קיבלנו ש $|P(A \cup \{b\})| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

**<u>זוג סדור</u>**

ראינו שבהגדרת קבוצה אין חשיבות לסדר האיברים. ישנם מקרים שסדר האיברים כן חשוב, למשל בהצגת נקודה במישור. נסמן זוג סדור $(a,b)$ כאשר סדר האיברים משנה.

**<u>הגדרה</u>**

נאמר ש $(a,b)=(c,d)$ אם ורק אם $a=c\wedge b=d$ .

**<u>דוגמה</u>**

$(1,2)\neq(2,1)$ אבל $(1,2)=(2,1)$ .

**<u>מכפלה קרטזית</u>**

תהיינה $A,B$ קבוצות הקבוצה $A\times B=\{(a,b):a\in A\wedge b\in B\}$ נקראת המכפלה הקרטזית של $A,B$ .

**<u>דוגמאות</u>**

1. $A=\{2,3\},B=\{1,4\}\Rightarrow A\times B=\{(2,1),(2,4),(3,1),(3,4)\}$ .
2. $A=\{2,3\},B=\{1,4\}\Rightarrow B\times A=\{(1,2),(1,3),(4,2),(4,3)\}$ .

שימו לב: $A\times B\neq B\times A$ .

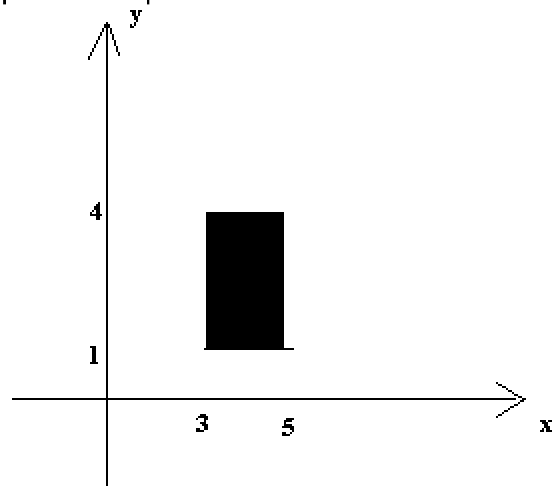
**<u>הערה</u>**

$A\times B=C\times D\Leftrightarrow A=C\wedge B=D$ .

**<u>דוגמאות נוספות למכפלה קרטזית</u>**

3. $A=\mathbb{R},B=\mathbb{R}\Rightarrow A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ז"א קבוצת כל הנקודות במישור – סימון $\mathbb{R}^2$ .
4. $A=[3,5],B=[1,4]\Rightarrow A\times B=\{(x,y)\in R^2\mid 3\leq x\leq 5\wedge 1\leq y\leq 4\}$ .

המשמעות הגיאומטרית לדוגמה 4 – קבוצת כל הנקודות במלבן שבשרטוט




**<u>n-יה סדורה</u>**

תהיינה $A_1,A_2,A_3,....,A_n$ קבוצות המכפלה הקרטזית של $A_1,A_2,A_3,....,A_n$ היא $A_1\times A_2\times A_3,....\times A_n=\{(a_1,a_2,...,a_n)\mid a_1\in A_1,a_2\in A_2,...,a_n\in A_n\}$ .

איבר בקבוצה הנ"ל נקרא n-יה סדורה.

**<u>דוגמה</u>**

$A_1=\{1,2\},A_2=\{2,3\},A_3=\{0\}\Rightarrow A_1\times A_2\times A_3=\{(1,2,0),\{1,3,0\},(2,2,0),(2,3,0)\}$ .

**<u>הערה</u>**

עבור קבוצה כלשהי מתקיים $\phi\times A=\phi$ .

**<u>הגדרה -יחס</u>**

קבוצה חלקית $R$ של $A\times B$ נקראת יחס מ $A$ ל $B$ . אם $A=B$ אומרים שזה יחס מעל $A$ .

סימון – את האיבר $(a,b)\in R$ נסמן ע"י $aRb$

**דוגמאות**

1. $A=\{1,2,3\}, B=\{5,7,8\}$ $R=\{(1,7),(3,8)\}$. מכיוון ש $R\subseteq A\times B$ אז $R$ הוא יחס מ $A$ ל $B$.

2. $A=\{1,2,3\}$ $R=\{(x,y)\in A\times A | x\le y\}$ ואז $R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$. מכיוון ש $R\subseteq A\times A$ אז $R$ יחס מעל $A$. מכיוון ש $(1,2)\in R$ ניתן לרשום $1R2$.

3. $A=\{1,2,3\}$ $R=\phi$ יחס מעל $A$ (שנקרא היחס הריק) מכיוון ש $\phi\subseteq A\times A$.

4. עבור קבוצה כלשהי $A$ $R=A\times A$ יחס מעל $A$ (שנקרא היחס המלא)

**יחס רפלקסיבי**

תהיי $A$ קבוצה כלשהי ויהי $R$ יחס מעל $A$. נאמר ש $R$ יחס רפלקסיבי אם $a\in A \Rightarrow (a,a)\in R$.

**דוגמאות**

1. בדוגמה הקודמת $R$ הוא יחס רפלקסיבי מכיוון ש:
   i. $R$ הוא יחס מעל $A$.
   ii. $A=\{1,2,3\}$ ו $(1,1)\in R,(2,2)\in R,(3,3)\in R$ ז"א לכל $a\in A$ מתקיים $(a,a)\in R$.
2. תהיי $A=\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות. נגדיר קבוצה $R$ - לכל $i,j\in I$ $(A_i,A_j)\in R \Leftrightarrow A_i\subseteq A_j$.
   i. $R$ הוא יחס מעל $A$.
   ii. מכיוון שלכל קבוצה $B$ מתקיים $B\subseteq B$ נקבל שלכל $i\in I$ $(A_i,A_i)\in R$.

**יחס סימטרי**

תהיי $A$ קבוצה כלשהי ויהי $R$ יחס מעל $A$. נאמר ש $R$ יחס סימטרי אם $(a,b)\in R \Rightarrow (b,a)\in R$.

**דוגמאות**

1. $A=\{1,2\}$

   i. $R_1=\{(1,1)\}$ יחס סימטרי.
   ii. $R_2=\{(1,2)\}$ לא יחס סימטרי מכיוון ש $(1,2)\in R$ אבל $(2,1)\notin R$.
   iii. $R_3=\{(1,2),(2,1)\}$ יחס סימטרי.
   iv. היחס הריק הוא יחס סימטרי.
   v. היחס המלא הוא יחס סימטרי.

**יחס טרנזיטיבי**

תהיי $A$ קבוצה כלשהי ויהי $R$ יחס מעל $A$. נאמר ש $R$ יחס טרנזיטיבי אם $(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$.

**דוגמה**

תהיי $A=\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות. נגדיר קבוצה $R$ - לכל $i, j\in I$
$(A_i, A_j)\in R \Leftrightarrow A_i \subseteq A_j$.

מכיוון שלכל שלוש קבוצות $A,B,C$ מתקיים $A\subseteq C \Leftarrow A\subseteq B \wedge B\subseteq C$

**יחס שקילות**

תהיי $A$ קבוצה כלשהי ויהי $R$ יחס מעל $A$. נאמר ש $R$ יחס שקילות אם הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי.

**דוגמאות**

1. היחס המלא הוא יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי ולכן הוא יחס שקילות.
2. היחס הריק לא סימטרי ולכן הוא לא יחס שקילות.
3. תהיי $A=\{1,2,3,4\}$ ותהיינה $A_1=\{1,4\}, A_2=\{3\}, A_3=\{2\}$ תתי קבוצות של $A$. נסמן $I=\{1,2,3\}$ נגדיר יחס $R$ מעל $A$ באופן הבא:
$R=\{(a,b)\in A\times A \mid \exists i\in I : a\in A_i \wedge b\in A_i\}$ ואז
$R=\{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4),(2,2),(3,3)\}$. שימו לב: $R$ הוא יחס שקילות. שימו לב:
$R=A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup A_3\times A_3=\bigcup_{i\in I} A_i\times A_i$

האם נוכל לבנות יחס שקילות מכל משפחה של תתי קבוצות של $A=\{1,2,3,4\}$?

תהיינה $A_1=\{1,3\}, A_2=\{2\}$ שימו לב שאם נבנה את הקבוצה $R$ כפי שבנינו אותה בדוגמה הקודמת נקבל ש $R=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(2,2)\}$. $R$ לא רפלקסיבי מכיוון ש $(4,4)\notin R$.

ההבדל בין הדוגמה הנ"ל לדוגמה הקודמת הוא:

בדוגמה הקודמת $\bigcup_{i\in I} A_i = A$ ובדוגמה הנ"ל $\bigcup_{i\in I} A_i \neq A$.

ואם ניקח משפחה של תתי קבוצות המקיימת $\bigcup_{i\in I} A_i = A$?

תהיינה $A_1=\{1,3\}, A_2=\{3,4\}, A_3=\{2\}$ ואז
$R=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(2,2)\}$ שימו לב ש $(1,3)\in R\wedge (3,4)\in R$
אבל $(1,4)\notin R$ ולכן $R$ לא יחס טרנזיטיבי ולכן לא יחס שקילות.

ומה ההבדל במקרה זה? שימו לב: $A_1\cap A_2\neq\phi$.

**חלוקה**

קבוצה של תתי קבוצות לא ריקות של קבוצה $A$ $\{A_i\}_{i\in I}$ נקראת חלוקה של $A$ אם:

1. $\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

2. $A_i \cap A_j \neq \phi \Rightarrow i = j$.

**<u>דוגמה</u>**

$A=\mathbb{N}$ , $A_1 = 2\mathbb{N}, A_2 = 2\mathbb{N}-1$ אז $\{A_1, A_2\}$ חלוקה של $A$.

**<u>מחלקת שקילות</u>**

יהי $R$ יחס שקילות מעל $A$ ויהי $a\in A$ הקבוצה $\{b\in A | (a,b)\in R\}$ נקראת מחלקת השקילות של $a$ ומסומנת ע"י $[a]_R$.

**<u>דוגמה</u>**

נתבונן ביחס $R=\{(1,1),(1,4),(4,1),(4,4),(2,2),(3,3)\}$ מעל $A=\{1,2,3,4\}$.

$[1]_R=\{1,4\},[2]_R=\{2\},[3]_R=\{3\}$.

**<u>משפט</u>**

הטענות הבאות שקולות:

א. $[a]=[b]$.

ב. $a\in[b]$.

ג. $[a]\cap[b]\neq\phi$.

**<u>הוכחה</u>**

א $\Leftarrow$ ב

נתון ש $[a]=[b]$ מכיוון ש $R$ יחס שקילות אז הוא יחס רפלקסיבי ולכן $(a,a)\in R$ ועל פי הגדרת מחלקת שקילות נקבל ש $a\in[a]$ מכיוון ש $[a]=[b]$ נקבל את הדרוש.

ב $\Leftarrow$ ג

נתון ש $a\in[b]$ מכיוון ש $R$ יחס שקילות אז הוא יחס רפלקסיבי ולכן $(a,a)\in R$ ועל פי הגדרת מחלקת שקילות נקבל ש $a\in[a]$ ולכן $a\in[a]\cap[b]$.

ג $\Leftarrow$ א

נתון ש $[a]\cap[b]\neq\phi$ ז"א שקיים $x\in A$ כך ש $x\in[a]\wedge x\in[b]$ ומהגדרת מחלקת שקילות נקבל ש $(a,x)\in R\wedge(b,x)\in R$ מכיוון ש $R$ יחס סימטרי נקבל ש $(x,a)\in R$ ומכיוון ש $R$ יחס טרנזיטיבי נקבל ש $(b,a)\in R$.

יהי $y\in[a]$ על פי הגדרת מחלקת שקילות $(a,y)\in R$ מכיוון ש $(b,a)\in R$ ו $R$ יחס טרנזיטיבי נקבל ש $(b,y)\in R$ ועל פי הגדרת מחלקת שקילות $y\in[b]$ ז"א $[a]\subseteq[b]$.

באותו אופן ניתן להוכיח ש $[b]\subseteq[a]$ ולקבל את הדרוש.

**<u>מסקנה</u>**

יהי $R$ יחס שקילות על $A$, אזי $\{[a]_R : a\in A\}$ הוא חלוקה של $A$.