אלגברה ליניארית 2 – תרגיל מס' 5

1. א. תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ טרנספורמציה לינארית המוגדרת ע"י: $T(x,y,z)=(x,x-y,0)$.

בדוק האם התת-מרחבים שלהלן הם T-אינווריאנטיים:

$$U_1=Sp\{(2,1,0)\}$$
$$U_2=Sp\{(1,0,0)\}$$
$$U_3=Sp\{(0,0,1)\}$$

ב. תהי $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ טרנספורמציה לינארית המוגדרת ע"י:
$T(x,y,z,u)=(x+z,0,0,x-z)$.

מצא תת-מרחב מממד 2 של $\mathbb{R}^4$ שהוא T-אינווריאנטי.

כמו-כן מצא תת-מרחב שאינו T-אינווריאנטי.

2. א. יהיו $v_1,\ldots,v_k$ וקטורים עצמיים השייכים לאותו ערך עצמי λ של T. הוכח כי התת-מרחב $W=Sp\{v_1,\ldots,v_k\}$ הוא T-אינווריאנטי.

ב. הסק מסעיף א' כי כל תת-מרחב של התת-מרחב העצמי V_λ הוא T-אינווריאנטי.

ג. יהי W תת-מרחב T-אינווריאנטי כלשהו (לאו דוקא התת-מרחב העצמי של T). האם נכון הוא, כי כל תת-מרחב של W הוא T-אינווריאנטי?

ד. יהי W תת-מרחב T-אינווריאנטי ממימד 1. הוכח כי $W=Sp\{v\}$ כאשר v הוא וקטור עצמי של T.

ה. השתמש בסעיף ד', ומצא את כל תתי-המרחבים האינווריאנטיים של הטרנספורמציה:
$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-7&8\\-6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

3. תהי T טרנספורמציה לינארית במרחב דו-ממדי V. נניח כי ל-T אין ערכים עצמיים.

מצא את כל תתי-המרחבים שהם T-אינווריאנטיים.

4. תהי $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ טרנספורמציה לינארית המוגדרת ע"י:
$T(x,y,z,u)=(x+z,0,0,x-z)$.

ויהי $W=\{(\alpha,0,0,\beta)\,|\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ תת-מרחב T-אינווריאנטי.

א. רשום את המטריצה $\left[T_W\right]_{B_1}$ בבסיס: $B_1=\{v_1=(1,0,0,1),v_2=(1,0,0,-1)\}$ של W.

ב. השלם את B_1 לבסיס B של $\mathbb{R}^4$ ורשום את המטריצה $\left[T\right]_B$.

5. תהי $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ טרנספורמציה לינארית המוגדרת ע"י:

$$T(x,y,z,u)=(\tfrac{5}{2}x+y-\tfrac{1}{2}z+u,3y+u,\tfrac{1}{2}x+y+\tfrac{3}{2}z+u,3u)$$

א. הראה כי:

$$W_1=Sp\{v_1=(1,0,1,0),v_2=(1,0,-1,0)\}$$
$$W_2=Sp\{v_3=(1,1,1,0),v_4=(1,1,1,1)\}$$

הם תתי-מרחבים T-אינווריאנטיים.

ב. הוכח כי $\mathbb{R}^4=W_1\oplus W_2$.

ג. רשום את מטריצות הטרנספורמציות $\left[T\right]_{W_1}$ ו- $\left[T\right]_{W_2}$ בבסיסים $B_1=\{v_1,v_2\}$, $B_2=\{v_3,v_4\}$ בהתאמה.

ד. מצא את $\left[T\right]_B$.

<u>בהצלחה!</u>