לינארית 1 (88112), סמטסטר חורף תשעט,מועד ב'-פתרון

חלק א

1. יהא V מ"ו נוצר סופית ו $T,S:V\to V$ ה"ל. נסמן ב I את העתקת הזהות.

(א) הוכיחו/הפריכו: אם $(T+I)\,S=S$ אז $\mathrm{Im}S\subseteq\ker T$.

פתרון: הוכחה: אם $(T+I)\,S=S$ אזי $TS+S=S$ לכן $TS=0$. מכאן שלכל v מתקיים

$$T(S(v))=0$$

ומכיוון ש $\mathrm{Im}S=\{Sv|\,v\in V\}$ נקבל שכל איבר ב $Sv\in\mathrm{Im}S$ מקיים $T(S(v))=0$ כלומר $S(v)\in\ker T$ ונקבל את ההכלה הדרושה.

(ב) הוכיחו/הפריכו: אם $TST=I$ אז $TS=ST$.

פתרון: הוכחה: אם $TST=I$ אזי T (הימנית) חח"ע ו T (השמאלית) על (בגלל ש I חח"ע ועל) ולכן T הפיכה.נכפיל את השיוון

$$TST=I$$

ב T^{-1} מימין ונקבל ש

$$TS=T^{-1}$$

ונוכל להכפיל

$$TST=I$$

ב T^{-1}גם משמאל ולקבל

$$ST=T^{-1}$$

ומכאן ש

$$ST=T^{-1}=TS$$

כנדרש.

(ג) מצאו ה"ל הפיכות S,T כך ש $(T+S)^2=0$ וגם $TS=-ST$ או הוכיחו שלא קיימות כאלה.

פתרון: הוכחה: נסתכל על $V=\mathbb{R}^2$ ונגדיר $e_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},e_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. מתקיים ש $\{e_1,e_2\}$בסיס ל V ונוכל לפי משפט ההגדרה להגדיר S,T כך:

$$\begin{aligned}Te_1&=e_2\\Te_2&=e_1\end{aligned}$$

ו

$$\begin{aligned}Se_1&=e_2\\Se_2&=-e_1\end{aligned}$$

ואז

$$\begin{aligned}T\left(S(e_1)\right)&=T(e_2)=e_1\\T\left(S(e_2)\right)&=T(-e_1)=-e_2\end{aligned}$$

וגם

$$S\left(T(e_1)\right)=S(e_2)=-e_1$$
$$S\left(T(e_2)\right)=S(e_1)=e_2$$

ולכן $TS=-ST$ על הבסיס $\{e_1,e_2\}$ולכן על כל V.

$$(T+S)(e_1)=Te_1+Se_1=e_2+e_2=2e_2$$
$$(T+S)(e_2)=Te_2+Se_2=e_1-e_1=0$$

ולכן

$$(T+S)^2(e_1)=(T+S)(2e_2)=2(T+S)(e_2)=0$$
$$(T+S)^2(e_2)=(T+S)(0)=0$$

ולכן $T+S$ מחזירה 0 על הבסיס $\{e_1,e_2\}$ולכן על כל V ולכן זוהי העתקת האפס.

2. תהיינה A,B,C ריבועיות כך ש $AB=0$ וגם $BC-I=0$. הוכיחו/הפריכו: $A=0$.
פתרון: הוכחה: מהנתון ש $BC-I=0$ נקבל ש

$$BC=I$$

ולכן B הפיכה ו C ההופכית שלה. נכפיל את השיוויון $AB=0$ (שגם נתון בשאלה) ב C מימין ונקבל

$$A=AI=ABC=0C=0$$

כנדרש.

חלק ב

3. נסמן $V=\mathbb{R}^{2\times 2}$ ונגדיר

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$$
$$U=\left\{A\in V \mid A^t=A\right\}$$

(א) מצאו בסיסים ומימדים ל 4 המרחבים $U,W,U\cap W,U+W$.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן לעבוד עם הבסיס הסטנדרטי S של V ולהציג את המרחבים

$$[W]_S=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \\ a\end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$$
$$[U]_S=\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d\end{pmatrix} \mid b=c\right\}$$

ולהמשיך את הפתרון עם אלגוריתמיקה ידועה ומוכרת.

(ב) הוכיחו/הפריכו: לכל $A,B\in U$ מתקיים $AB\in U$.
פתרון: הפרכה:המטריצות

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

שתיהן ב U (סימטריות) אבל

$$AB=\left(\begin{array}{cc}0&1\\1&2\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}2&1\\1&0\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}1&0\\4&1\end{array}\right)$$

אינה ב U (אינה סימטרית).

(ג) הוכיחו/הפריכו: לכל $A,B\in W$ מתקיים $AB\in W$.

פתרון: הוכחה: תהיינה שתי מטריצות

$$A=\left(\begin{array}{cc}a_1&b_1\\-b_1&a_1\end{array}\right),B=\left(\begin{array}{cc}a_2&b_2\\-b_2&a_2\end{array}\right)$$

שתיהן ב W והכפל שלהם

$$AB=\left(\begin{array}{cc}a_1&b_1\\-b_1&a_1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}a_2&b_2\\-b_2&a_2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}a_1a_2-b_1b_2&b_1a_2+a_1b_2\\-b_1a_2-a_1b_2&a_1a_2-b_1b_2\end{array}\right)$$

שגם ב W שהרי נגדיר $a=a_1a_2-b_1b_2$ ו $b=b_1a_2+a_1b_2$ ונקבל ש

$$AB=\left(\begin{array}{cc}a&b\\-b&a\end{array}\right)\in W$$

כנדרש.

4. נסמן $V=\mathbb{R}^3$. נגדיר

$$B=\left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\1\\1\end{array}\right)\right\}$$

$$C=\left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\1\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\1\\1\end{array}\right)\right\}$$

שני בסיסים של V. נסמן ב D בסיס נוסף ל V. תהיינה $S,T:V\to V$ שתי ה"ל המקיימות

$$[S]_C^D=\left(\begin{array}{ccc}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right),\ \ [T]_D^B=\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$$

(א) מצאו בסיסים ומימד של $\ker T,\mathrm{Im}S$.

פתרון: המטריצה $[T]_D^B=I$ ולכן הפיכה. מכאן ש T הפיכה ובפרט חח"ע ולכן

$$\ker T=\{0\}$$

ו $\emptyset$ היא בסיס למרחב זה ומימדו 0. בנוסף, לפי משפט,

$$[\mathrm{Im}S]_C=C(\left(\begin{array}{ccc}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{array}\right))=\mathrm{span}\left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}1\\1\\0\end{array}\right)\right\}$$

ולכן

$$\mathrm{Im}S=\mathrm{span}\left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}1\\1\\0\end{array}\right)\right\}$$

שמימדו 2 ו $\left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}1\\1\\0\end{array}\right)\right\}$ בסיס אפשרי למרחב.

(ב) האם אפשר למצוא בסיס ל $\ker S$? אם כן, מצאו אחד. אם לא, הוכיחו זאת.
פתרון: לפי משפט,

$$[\ker S]_C = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = N\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ולכן: אם $D = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ נקבל ש

$$\ker S = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ואם $D = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ נקבל ש

$$\ker S = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ולכן אי אפשר למצוא $\ker S$ ללא ידיעת D, שהרי

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \neq \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

(ג) האם אפשר למצוא בסיס ל $\text{Im}T$? אם כן, מצאו אחד. אם לא, הוכיחו זאת.
פתרון: המטריצה $[T]_D^B = I$ ולכן הפיכה. מכאן ש T הפיכה ובפרט על ולכן

$$\text{Im}T = \mathbb{R}^3$$

ו $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס למרחב זה.

(ד) מצאו נוסחה מפורשת לה"ל $S \circ T$.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות ע"י שימוש במשפט ש:

$$[S \circ T]_C^B = [S]_C^D [T]_D^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ונוכל להמשיך כי יש לנו מטריצה מייצת של $S \circ T$ עם בסיסים נתונים.

5. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

(א) מצאו לאילו ערכי $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \in C(A)$.
פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות ע"י

דירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x^2 \\ 4 & 5 & 6 & x \\ 7 & 8 & 9 & 1 \end{array}\right)$$

ובדיקה מתי יש פתרון (כלומר, מתי אין שורת סתירה) + לזכור ש x ממשי.

(ב) מצאו לאילו ערכי $x \in \mathbb{C}$ מתקיים $\begin{pmatrix} x^4 \\ x \\ 2x+1 \end{pmatrix} \in C(A)$.

פתרון: כולם מוזמנים לכתוב פתרון מסודר ולעלות לאתר. נסתפק פה בלהגיד שניתן למצוא את התשובה בקלות ע"י דירוג:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & x^4 \\ 4 & 5 & 6 & x \\ 7 & 8 & 9 & 2x+1 \end{array}\right)$$

ובדיקה מתי יש פתרון (כלומר, מתי אין שורת סתירה).