הרצאה 6

תזכורת- $R \subseteq A \times A$ יחס

"$\leq$" סדר חלקי: רפלקסיבי, טרנזיטיבי, אנטי-סימטרי.

$$(a \leq a, \quad a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c, \quad a \leq b \leq a \Rightarrow a = b)$$

$(A, \leq)$ היא קס"ח. תהא $X \subseteq A$.

מקסימלי/מינימלי vs. גדול ביותר/קטן ביותר

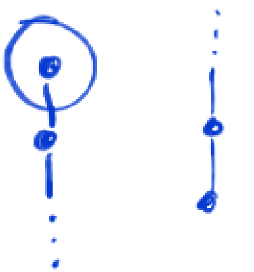
$x \in X$ מקסימלי אם: $\forall y \in X, \; x \leq y \Rightarrow x = y$ (אין גדול ממש מ-x)

$x \in X$ גדול ביותר: $\forall y \in X, \; y \leq x$

* גדול ביותר $\Longrightarrow$ הוא המקסימלי היחיד

$\not\Longleftarrow$

* "ייתכן כמה מקסימליים, אם יש גדול ביותר אז יש מקסימלי יחיד וזה הוא.



חסמים

הגדרות: תהא $(A, \leq)$ קס"ח ו- $X \subseteq A$ תת-קבוצה. איבר $a \in A$ (לאו דווקא ב-X) הוא:

(i) חסם מלעיל של X אם: $\forall x \in X, \; x \leq a$

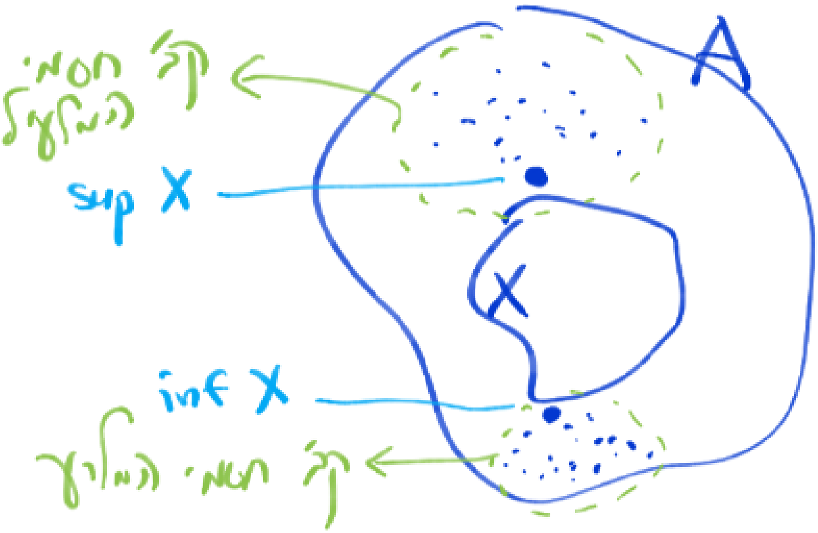
(ii) <u>חסם מלרע</u> של X אם: $a \le x$, $\forall x \in X$.

<u>הערה</u> – אם ל-X יש גדול ביותר אז הוא מהווה חסם מלעל.
אם יש ל-X קטן ביותר אז הוא מהווה חסם מלרע.

<u>הגדרות</u>: נניח $(A, \le)$ קס"ח, $X \subseteq A$ תת'
אם לקבוצת חסמי <u>מלעל</u> של X יש איבר קטן ביותר, הוא נקרא: $\boxed{\sup X}$ (סופרמום=חסם עליון)

אם לקבוצת חסמי מלרע של X יש איבר גדול ביותר, הוא נקרא: $\boxed{\inf X}$ (אינפימום=חסם תחתון).

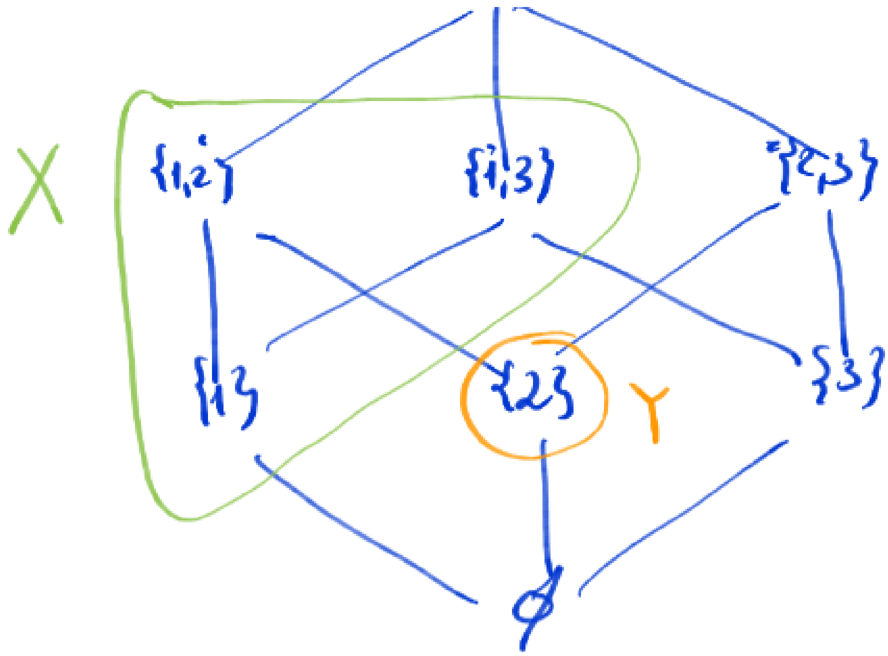
<u>הערה</u> –
<u>אם</u> inf, sup קיימים: הם יחידים.
(ראינו שגדול ביותר/קטן ביותר יחידים, אם קיימים.)



<u>דוגמאות</u>:

① $(P(\{1,2,3\}), \subseteq)$

$\bullet\{1,2,3\}$



מי הם חסמי המלעיל של X?

$\{1,2,3\}$

מי הם חסמי המלרע של X?

$\phi, \{1\}$

היכן ה sup?

$\sup X = \{1,2,3\}$

הערה: זו דוגמה לכך ש $\sup X \notin X$.

היכן ה inf?

$\inf X = \{1\}$

$Y = \{\{2\}\}$

חסמי מלעיל של Y: $\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

$\sup Y = \{2\}$

חסמי מלרע של Y: $\phi, \{2\}$

$\inf Y = \{2\}$

$Z = X \cup Y$

<u>חסמי מלעיל:</u> $\{1,2,3\}$ $(\sup Z = \text{אין})$

<u>חסמי מלרע:</u> ϕ $(\inf Z = \text{אין})$

<u>טענה:</u> נתון ב- $(P(B), \subseteq)$. תהי $X \subseteq P(B)$.

אזי <u>קיימים</u> $\sup X, \inf X$ ומתקיים:

$$\sup X = \bigcup_{S\in X} S$$

$$\inf X = \bigcap_{S\in X} S$$

<u>הוכחה:</u>

<u>sup:</u> צ"ל כי $\bigcup_{S\in X} S$ הוא הקטן ביותר מבין חסמי המלעיל.

ראשית, נראה כי הוא אכן חסם מלעיל לקבוצה. צ"ל שלכל $T\in X$ מתקיים:

$$T \subseteq \bigcup_{S\in X} S$$

וזה נכון מהגדרת האיחוד $\left(\bigcup_{S\in X} S := \{a \mid \exists S\in X : a\in S\}\right)$

לכן, $\bigcup_{S\in X} S$ הינו חסם מלעיל.

כדי להראות כי $\bigcup_{S\in X} S = \sup X$ נותר להראות

כי הוא הקטן ביותר מבין חסמי המלעיל.

יהי $T \in P(B)$ חסם מלעיל, נראה כי $\bigcup_{S\in X} S \subseteq T$.

T חסם מלעיל של X ולכן לכל $S \in X$ מתקיים: $S \subseteq T$. $(*)$

יהי $a \in \bigcup_{S\in X} S$. מהגדרת האיחוד קיימת $S \in X$

כך ש $a \in S$, ולכן $a \in T$ (בגלל $(*)$).

קיבלנו, שלכל $a \in \bigcup_{S\in X} S$, מתקיים $a \in T$ ולכן:

$\bigcup_{S\in X} S \subseteq T$, כנדרש.

<u>inf</u> – בדומה (תרגיל לא להגשה).

מ.ש.ל.

② $(\mathbb{R}, \leq)$

$$X = [0,1) = \{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r < 1\}$$

מי חסמי <u>המלעיל</u>? $\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 1\} = [1, \infty)$

האם <u>$\sup X$</u> קיים? כן, $\sup X = 1$.

מי חסמי <u>המלרע</u>? $\{r \in \mathbb{R} \mid r \leq 0\} = (-\infty, 0]$

האם <u>$\inf X$</u> קיים? כן, $\inf X = 0$.

$X = \mathbb{N} \ (\subseteq \mathbb{R})$

$Y = \mathbb{N} \ (\subseteq \mathbb{N})$

אין חסמי מלעיל, קרי אין $\sup Y$.

③ $(\mathbb{Q}, \leq)$

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \sqrt{2}\}$$

מי חסמי המלרע? $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2}\}$ $(= \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2}\})$

האם יש $\inf X$? אין רציונלי גדול ביותר הקטן $\geq \sqrt{2}$,

1.4
1.41
1.41...

$(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$

לכן לא קיים $\inf X$.

(אולם עבור ב- $(\mathbb{R}, \leq)$, $\inf X = \sqrt{2}$.)

④ $(\mathbb{N}, |)$

$(m|n \iff \exists q \in \mathbb{N}: \ m \cdot q = n)$

$B = \{4, 6\}$

חסמי מלעיל: $\{12k \mid k \in \mathbb{N}\} = 12, 24, 36, \dots$

$\sup B$: 12

$$\text{lcm}(b_1, \dots, b_k) = \left\{ \begin{array}{c} \text{המספר הטבעי הקטן ביותר} \\ b_1, \dots, b_k \text{ המתחלק ב-} \end{array} \right\}$$

(lowest common multiple)

$\{2\cdot 2,\ 2\cdot 3\} \overset{lcm}{\rightsquigarrow} 2^2 \cdot 3^1 = 12$

$\{15, 24, 18\} \overset{lcm}{\rightsquigarrow} 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 360$

$3\cdot 5 \quad 2^3\cdot 3 \quad 2\cdot 3^2$

חסם מלרע: של $B=\{4,6\}$: $1, 2$

$\underline{\inf B}$: 2

$\gcd(b_1,\dots,b_k) = \left\{ \begin{array}{c} \text{המספר הגדול ביותר} \\ \text{המחלק את } b_1,\dots,b_k \end{array} \right\}$

(greatest common divisor)

$\{15, 24, 18\} \overset{gcd}{\rightsquigarrow} 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 3$

$3\cdot 5 \quad 2^3\cdot 3 \quad 2\cdot 3^2$

5 יהי V מ״ו. $A = \left(\left\{ \begin{array}{c} \text{תתי-מ״ו} \\ \text{של } V \end{array} \right\}, \leq \right)$.

תמ״ו

לדוגמה: $B = \{W_1, W_2\}$

$\inf B = W_1 \cap W_2$

$\sup B = W_1 + W_2$

(מדוע? כי $w_1,w_2 \le w_1+w_2$ חסם מלעיל של B,
ולכל חסם מלעיל u:

$$\underbrace{w_1+w_2 \le u} \Leftarrow w_1,w_2 \le u$$

ולכן: w_1+w_2 קטן ביותר מבין חסמי המלעיל,

כלומר:
$$\sup B = w_1+w_2 \text{ .)}$$

הערה: אם $(A,\le)$ קס"ח, $X\subseteq A$ תת"ק.
אם a חסם מלעיל (מלרע) של X, ומתקיים:

$$a\in X$$

אזי a גדול ביותר (קטן ביותר) ב-X.

הוכחה: אם a חסם מלעיל אזי לכל $x\in X$:

$$x\le a$$

לכן, אם $a\in X$, אז בדיוק ההגדרה של גדול ביותר.
(בדומה, עבור קטן ביותר.) מ.ש.ל.

טענה: $(A,\le)$ קס"ח, $X\subseteq A$ תת"ק.

(i) יש ב-X גדול ביותר $\iff \sup X \in X$

(ii) יש ב-X קטן ביותר $\iff \inf X \in X$

הוכחה:

(ii) $(\Longleftarrow)$ נניח שיש ל-X קטן ביותר, נסמנו m.
נוכיח: שקיים $\inf X$, ושהוא שייך ל-X.

נוכיח למעשה כי $m = \inf X$.

צריך להראות: m חסם מלרע של X, והגדול ביותר מבין חסמי המלרע של X.

<u>m חסם מלרע</u>: מההגדרה של קטן ביותר.

<u>m גדול ביותר מבין חסמי מלרע</u>: יהי $a \in A$ חסם מלרע.
אזי $a \leq x$ לכל $x \in X$, ובפרט גם ל-$x = m$:
$a \leq m$, כנדרש.

לכן: $m = \inf X$ $(\in X)$.

$(\Longrightarrow)$ נניח $\inf X \in X$. צריך להוכיח: $\inf X$ קטן ביותר. זה נובע מההגדרה שלעיל.

מ.ש.ל.

16^{00}

<u>הערה</u>: אם $(A, \leq)$ קס"ח. אומר כי $\leq$ הינו <u>יחס סדר מלא</u> אם:

$$\forall a,b \in A: \quad a \leq b \text{ או } b \leq a$$

כמוכן, ניתן להשוות כל שני איברים בקבוצה. $\forall y$ קס"ם)

אם $(A,\le)$ קס"ח, $X\subseteq A$ תת"ק כך ש-$(X,\le)$ סדורה מלא, אומרים כי X __שרשרת__.

__דוגמאות:__ * $(\mathbb{R},\le)$, $(\mathbb{Q},\le)$ - קס"ם $(\mathbb{N},|)$ - לא קס"ם.

* $(\underbrace{P(\{1,2,3\})},\subseteq)$ - לא קס"ם, $\{1\},\{2\}$

לא ניתן להשוות $X=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$

X הינה שרשרת (כי $(X,\subseteq)$ קס"ם).

__הערה:__ לפעמים קוראים ליחס סדר מלא גם סדר לינארי או סדר קווי (או טריכוטומי).

__טענה:__ תהא $(A,\le)$ קס"ם ותהא $X\subseteq A$ תת"ק.

אזי: $x\in X$ מקסימלי $\iff$ x גדול ביותר
(מינימלי)   (קטן)

__הוכחה:__

$(\Longrightarrow)$ מתקיים בכל קס"ח.

$(\Longleftarrow)$ נניח x מקסימלי. יהי $y\in X$ כלשהו,
מאחר ש-$(A,\le)$ קס"ם מתקיים:

$y\le x$ או $x\le y$
$\|$

$$\Downarrow$$
$$x=y$$

קיבלנו שבכל מקרה $x \le y$. כלומר, x גדול ביותר ב-X.

עבור מינימלי - דומה. מ.ש.ל.

<u>הערה:</u> אם $(A,\le)$ קס"ח, $X\subseteq A$ $\Leftarrow$ $(X,\le)$ קס"ח.

<u>טענה:</u> תהא A קבוצה. נתבונן באוסף יחסי הסדר (החלקיים) על A:

$$\mathbb{O}_A := \left(\left\{\text{יחסי סדר חלקיים על } A\right\}, \subseteq\right)$$ קס"ח.

R יחס: $R\subseteq A\times A$

זהו בעצם ת"ק של $(P(A\times A),\subseteq)$.

י"ה: $R\in\mathbb{O}_A$. אז: R יחס סדר מלא $\Longleftrightarrow$ R איבר מקסימלי ב-$\mathbb{O}_A$.

<u>הוכחה:</u> $(\Leftarrow)$ נניח R יחס סדר מלא על A.

נ"ל: R מקס' ב-$\mathbb{O}_A$.

י"ה: $S\in\mathbb{O}_A$ נניח כי $R\subseteq S$. נניח בשלילה: $R\ne S$.

נב״ש שקיים $(a,b)\in S$, $(a,b)\notin R$. (*)

אבל R יחס סדר מלא ולכן: $(b,a)\in R$ או $(a,b)\in R$.

$$\Downarrow$$

$$(b,a)\in S$$

לכן $(a,b),(b,a)\in S \xRightarrow{\text{אנטי-סימטריות}} a=b$ בסתירה ל-(*).

לכן, $R=S$, כלומר הראינו ש-R מקסימלי ב-$\mathcal{O}_A$.

($\Rightarrow$) נניח כי R איבר מקסימלי ב-$\mathcal{O}_A$.
נניח בשלילה כי R אינו יחס סדר מלא.

נבנה יחס S, $R\subsetneq S$, וזו תהיה הסתירה.

לפי הנחת השלילה, R אינו מלא ולכן יש $a,b\in A$:

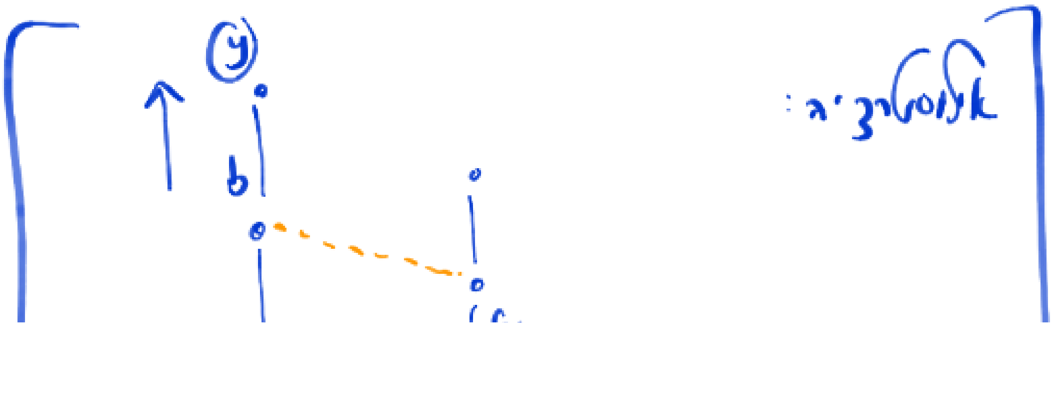
$(a,b),(b,a)\notin R$.

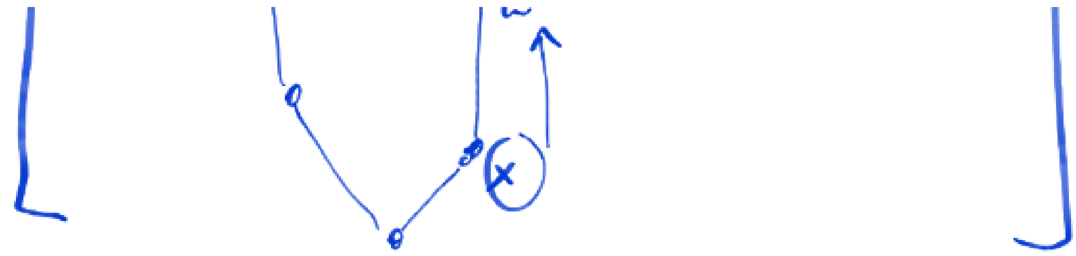
נגדיר יחס S: יחס הוא תת-קב׳ של $A\times A$, לכן איבריו הם צמדים סדורים.

$$S := R\cup\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{matrix} x,y\in A \\ (x,a),(b,y)\in R\end{matrix}\right\}$$

(a,b)

אילוסטרציה:





ברור כי $R \subsetneq S$ (ברור $R \subseteq S$ וכן $(a,b)\in S\setminus R$).

נותר להראות: $S \in \mathcal{O}_A$, כלומר שהוא יחס סדר של A!

רפלקסיביות – $\forall \alpha\in A,\quad (\alpha,\alpha)\in R \subseteq S$

טרנזיטיביות –

נניח: $(\alpha,\beta),(\beta,\gamma)\in S$. צ"ל $(\alpha,\gamma)\in S$.

מקרים:

① $(\alpha,\gamma)\in S \Leftarrow (\alpha,\beta),(\beta,\gamma)\in R$ מטרנז' R $(S\supseteq R)$.

② $\left.\begin{array}{l}(\alpha,\beta)\in R\\ (\beta,\gamma)\notin R\end{array}\right] \Rightarrow (\beta,a),(b,\gamma)\in R$

מטרנז' R: $(\alpha,a)\in R$ ולכן $\overset{\text{מהגדרת } S}{\Rightarrow}$ $(\alpha,\gamma)\in S$.

③ $(\alpha,\beta),(\beta,\gamma)\notin R \Rightarrow (\alpha,a),(\beta,a),(b,\beta),(b,\gamma)\in R$

מהגדרת S: $(\alpha,\gamma)\in S$.

אנטי-סימטריות: יהיו $\alpha,\beta\in A$ ומתקיים:

$\cdot(\alpha,\beta),\ (\beta,\alpha)\notin S$ ו

מקרים:

① $(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)\in R \Rightarrow \underline{\alpha=\beta}$ (כי R אנטי׳).

② $(\alpha,\beta)\in R$, $(\beta,\alpha)\notin R \Rightarrow (\beta,\alpha),(b,\alpha)\in R$

מטרנז׳ R: $(b,\beta)\in R$

שוב מטרנז׳ R: $(b,\alpha)\in R$ סתירה לנתון.

③ $(\alpha,\beta),(\beta,\alpha)\notin R \Rightarrow (\alpha,a),(\beta,a),(b,\beta),(b,\alpha)\in R$

מטרנז׳ R: $\Downarrow$

$(b,a)\in R$ בסתירה להנחה.

הוכחנו רפל׳, טרנז׳, ואנטיס׳ של S.

לכן, $R\subsetneq S$ והוא יחס סדר חלקי בפני עצמו, כלומר

R איננו מקסימלי ב- $(D_A,\subseteq)$, בסתירה.

לכן R $\subsetneq$ יחס סדר מלא, כנדרש.

מ.ש.ל.

<u>מכפלות של סדרים</u>

נניח $(A,\leq_A)$, $(B,\leq_B)$ קס״ח. נגדיר יחס סדר על המכפלה: נהוג <u>יחס המכפלה</u>:

$$(A \times B, \preccurlyeq)$$

$$(a_1,b_1) \preccurlyeq (a_2,b_2) \iff \begin{matrix} a_1 \leq_A a_2 \\ b_1 \leq_B b_2 \end{matrix}$$ וגם:

זהו יחס סדר חלקי:

. רפלק', אנטי-סי' – טרנזי'

. טרנז':

$$(a_1,b_1) \preccurlyeq (a_2,b_2) \preccurlyeq (a_3,b_3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1 \leq_A a_2 \leq_A a_3 \xRightarrow{\text{טרנז'}\ \leq_A} a_1 \leq_A a_3 \\ \text{וגם:} \qquad\qquad \text{וגם:} \\ b_1 \leq_B b_2 \leq_B b_3 \xRightarrow{\text{טרנז'}\ \leq_B} b_1 \leq_B b_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

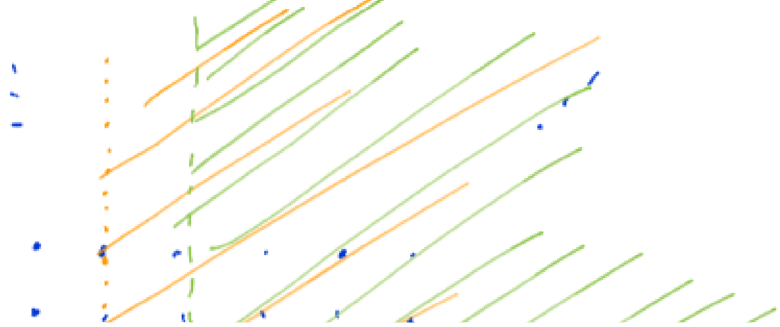
$$\Rightarrow (a_1,b_1) \preccurlyeq (a_3,b_3)$$

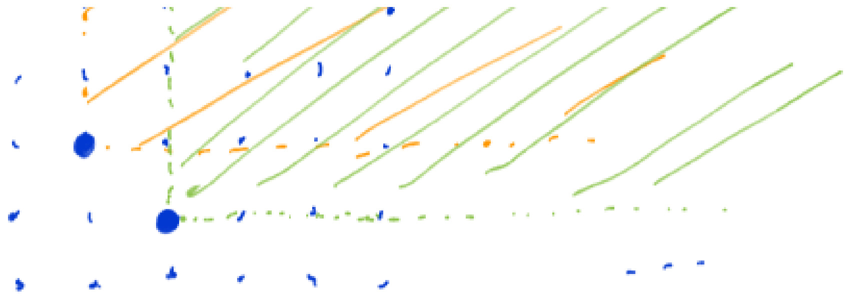
<u>שאלה:</u> נניח $(A, \leq_A)$, $(B, \leq_B)$ קס"ה.

האם גם $(A \times B, \preccurlyeq)$ קס"ה?

למשל -> $A = B = (N, \leq)$.

<u>$(N \times N, \preccurlyeq)$</u>:





$$\left(\begin{array}{l}(2,3) \preceq (a,b) \iff 2 \le a \wedge 3 \le b \\ (3,2) \preceq (a,b) \iff 3 \le a \wedge 2 \le b\end{array}\right) \quad :כי$$

רואים כי $(2,3) \npreceq (3,2)$ וגם $(3,2) \npreceq (2,3)$.

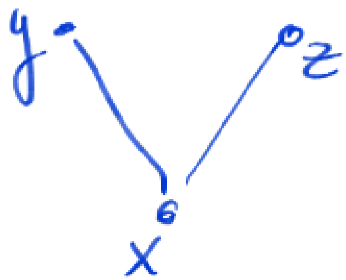
$$3 \nleq 2 \qquad\qquad 3 \nleq 2$$

זהו יחס <u>המכפלה</u>.

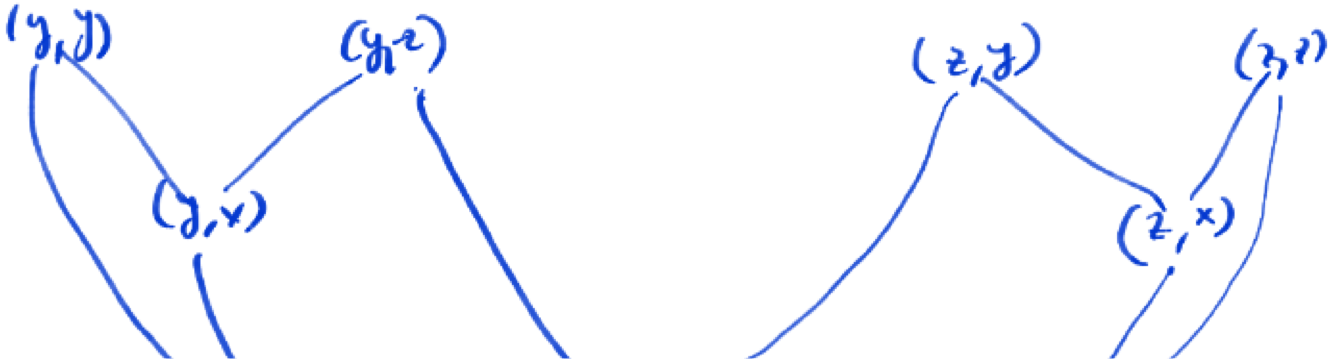
<u>דוגמה נוספת</u>: נצייר ד-

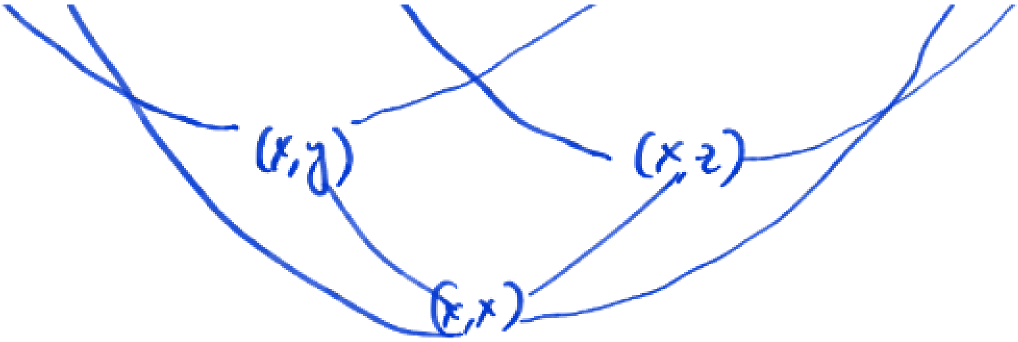
$$A = (\{x,y,z\}, \le)$$

$$x \le y, \quad x \le z$$



יחס המכפלה על $A \times A$:





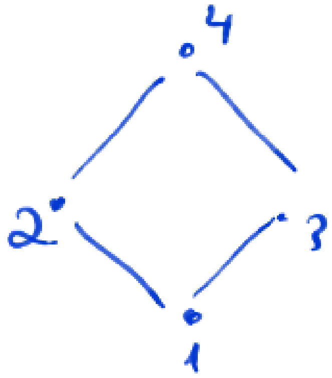
$$A=(\{1,2,3,4\}, \leq)$$

אי-השוואה ב- $\parallel$

סף

$1\leq 2,\quad 1\leq 3$

$2\leq 4,\quad 3\leq 4$



<u>תרגיל</u>: צייר דיאגרמת הסה של $(A\times A, \preceq)$ עם יחס המכפלה.

איזה יחס סדר אחר ניתן להגדיר על המכפלה, כך שאם $(A,\leq_A)$ $(B,\leq_B)$ קס"ם גם היחס על המכפלה יהיה מלא?

<u>הגדרה</u>: תהיינה $(A,\leq_A)$, $(B,\leq_B)$ קס"ח. נגדיר את יחס הסדר המילוני:

$$(A\times B, \preceq_d)$$

$$(a_1,b_1)\preceq_d(a_2,b_2) \iff \begin{cases} a_1=a_2 \wedge b_1\leq_B b_2 & \text{אם:} \\ \text{או:} & \\ a_1\leq a_2 \wedge (a_1\neq a_2) & \end{cases}$$

כמו חיפוש מילים במילון.

טענה: אם $(A,\le_A)$, $(B,\le_B)$ קס״מ אז היחס המילוני גם הוא $(A\times B,\preceq_d)$ קס״מ.

הוכחה: יהיו:

$$(a_1,b_1),\ (a_2,b_2)\in A\times B$$

נוכיח כי ניתן להשוותם לפי $\preceq_d$.

$(A,\le_A)$ קס״מ $\Leftarrow$ $\underbrace{a_1\le_A a_2}$ או $a_2\le_A a_1$

$(B,\le_B)$ קס״מ $\Leftarrow$ $\underbrace{b_1\le_B b_2}$ או $\underbrace{b_2\le_B b_1}$

נניח $a_1\le_A a_2$. אזי $a_1\ne a_2$ $\Downarrow$ לפי הגדרת $\preceq_d$:

$$(a_1,b_1)\preceq_d(a_2,b_2)$$

$a_1=a_2$ $\Downarrow$ אז $(a_1,b_1)\preceq_d(a_2,b_2)$ או:

$$(a_2,b_2)\preceq_d(a_1,b_1).$$

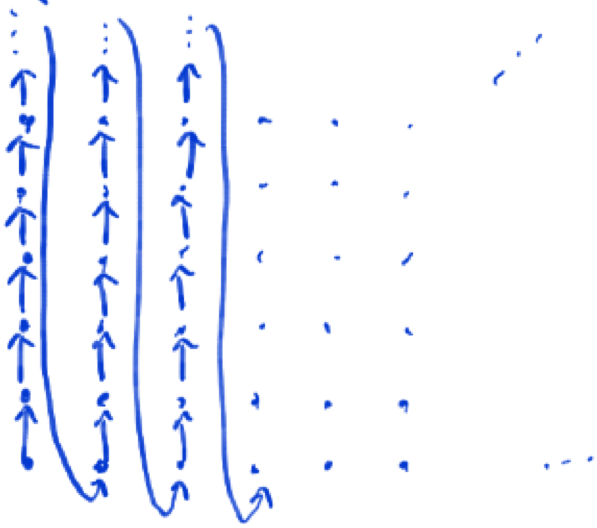
בכל אחד מהמקרים, הראינו כי ניתן להשוות את הזוגות לפי $\preceq_d$.
לכן $\preceq_d$ קס״מ.

מ.ש.ל.

דוגמא:

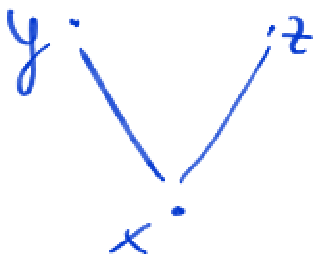
① נזכור לדוגמה $(\mathbb{N}, \leq)$. כיצד נראה היחס המילוני:

$(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, \leq_d)$?

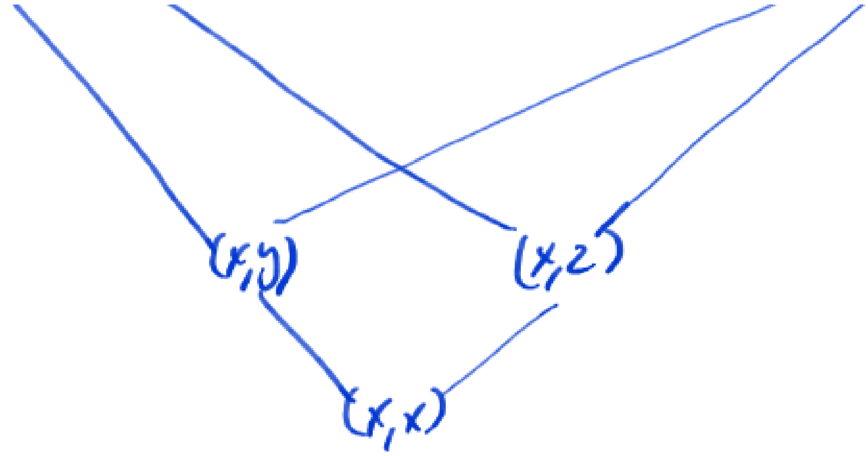


② ניקח לדוגמה: $A = (\{x,y,z\}, \leq)$

$x\leq y, \quad x\leq z$



איך תיראה הדיאגרמה של $(A\times A, \leq_d)$?



בשונה מיחס המכפלה שראינו קודם.

<u>תרגיל ראשון:</u> ציירו דיאגרמת הסה של

$$(\{1,2,3,4\}\times\{1,2,3,4\}, \preceq_d)$$

כאשר: $1\preceq 2, 3\preceq 4$.