שיעור חזרה

חתכי חרוט

פרבולות $x = ay^2$

היפרבולות $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

אליפסות $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

מעגלים $x^2 + y^2 = R^2$ - מקרה פרטי של אליפסות.

הם נקראים חתכי חרוט כי כולם חתכים של מישור עם החרוט(הכפול) $z^2 = x^2 + y^2$.
במקרה הכללי של תבנית ריבועית:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

אפשר לשנות קואורדינטות כדי לקבל חתך חרוט:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

באמצעות ליכסון אפשר להגיע לצורה:

$$\alpha \left(x - x_0\right)^2 + \beta \left(y - y_0\right)^2 = 1$$

ולפי הערכים של α וβ יודעים אם מדובר בהיפרבולה או באליפסה.

הסכם הסיכום של איינשטיין

אם כותבים

$$w_{kl} = x_{ij} {y_k}^j {z^i}_l$$

זה כאילו רושמים

$$w_{kl} = \sum_i \sum_j x_{ij} {y_k}^j {z^i}_l$$

אם אינדקס מופיע גם למטה וגם למעלה - אז מבצעים סכימה על האינדקס הזה.

עקומות דו־מימדיות

פונקציות מ"השעון" ל$\mathbb{R}^2$

$$\gamma\left(t\right)=\begin{pmatrix}\gamma^{2}\left(t\right)\\ \gamma^{2}\left(t\right)\end{pmatrix}$$

אפשר למצוא את האורך כפונקציה של הזמן:

$$s\left(t\right)=\int_{0}^{t}\left|\dot{\gamma}\left(t\right)\right|\,\mathrm{d}t$$

אפשר להפוך את s כדי לקבל את הזמן כפונקציה של המרחק $t\left(s\right)$, ולפי זה למצוא פרמטריזציה טבעית(=במהירות יחידה):

$$\gamma\left(t\right)=\gamma\left(t\left(s\right)\right)$$

דוגמה:

$$\gamma\left(t\right)=\begin{pmatrix}2t\\ 3t\end{pmatrix}$$

$$\dot{\gamma}\left(t\right)=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$$

$$s\left(t\right)=\int_{0}^{t}\sqrt{2^{2}+3^{2}}\,\mathrm{d}t=\int_{0}^{t}\sqrt{13}\,\mathrm{d}t=\sqrt{13}t$$

$$t=\frac{s}{\sqrt{13}}$$

$$\gamma\left(s\right)=\begin{pmatrix}\frac{2s}{\sqrt{13}}\\ \frac{3s}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}$$

אנחנו בעצם מאבדים את המהירות ומקבלים ווקטור כיוון: $\hat{T}\left(s\right)=\gamma'\left(s\right)$. הנורמל הוא האנך לווקטור המהירות:

$$\hat{n}\left(s\right)=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\hat{T}\left(s\right)$$

העקמומיות k קובעת את כיוון ומהירות הסיבוב של ווקטור הכיוון:

$$T'\left(s\right)=kn\left(s\right)$$

עקומות תלת־מימדיות

הפעם הפרמטריזציה היא מהשעון ל־$\mathbb{R}^3$:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma^1(t) \\ \gamma^2(t) \\ \gamma^3(t) \end{pmatrix}$$

גם כאן אפשר לדבר על מרחק ולמצוא פרמטריזציה טבעית:

$$s = \int_0^t \|\dot{\gamma}(t)\| \, \mathrm{d}t$$

$$t(s)$$

$$\gamma(s) = \gamma(t(s))$$

וגם כאן אפשר למצוא וקטור כיוון, נורמל ועקמומיות:

$$\hat{T} = \gamma'(s)$$

$$\hat{T}'(s) = k\hat{n}(s)$$

אבל כאן יש גם וקטור בי־נורמלי, שמאונך גם לעקומה וגם לנורמל ־ כלומר גם לעקומה וגם למישור בו העקומה נמצאת באותה נקודה:

$$\hat{b} = \hat{T} \times \hat{n}$$

הקשר בין הכיוון, הנורמל והבי־נורמל הוא:

$$\begin{cases} T'(s) = k\hat{n}(s) \\ n'(s) = -kT(s) + \tau\hat{b}(s) \\ b'(s) = -\tau\hat{n}(s) \end{cases}$$

משטחים

יש מיפוי $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, כאשר $r(u,v) \in \mathbb{R}^3$ לכל u, v.

בנוסף דורשים תנאי נורמליות ־ שלוקלית כל נקודה תגדיר משהו דו־מימדי ־ כלומר שדרגת $\mathrm{d}r$ תהיה מקסימלית בכל נקודה ־ כלומר $\operatorname{rank} \mathrm{d}r = 2$. כי למשל $r(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u+v \\ 0 \end{pmatrix}$ לא מגדיר משטח, אלא קו.

הדיפרנציאל של המיפוי הוא $\mathrm{d}r = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} u+v \\ u+v \\ 0 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

עקומות על משטח

אם יש לנו עקומה $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ומשטח $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, אז אפשר למפות דרך המשטח את העקומה למרחב.

מישור משיק

הדיפרנציאל של המשטח:

$$\mathrm{d}r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

הוא בעצם מפה מסביבה של הנקודה אל המישור המשיק:

$$\mathrm{d}\gamma : T_aU \to T_AM$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

זה בעצם אומר שכל הוקטורים על המפה היוצאים מנקודה מסויימת ממופים למישור המשיק לאותה נקודה. לכן הכפלה שלהם תתבצע לפי הוקטורים בT_AM, לא לפי הוקטורים בT_aU. זה בעצם משרה לנו מכפלה פנימית:

$$w, p \in U$$

$$\langle w, p \rangle = w^t \cdot \underbrace{\mathrm{d}r^t \mathrm{d}r}_{G} \cdot p = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

סימני כריסטופל

סימני כריסטופל מוגדרים ע"י הנגזרות הראשונה והשנייה של המשטח, התבנית היסודית השניה, והנורמל:

$$r_{\prime ij} = \Gamma_{ij}^{k} r_{\prime k} + b_{ij} \hat{n}$$

אבל למעשה ניתן לחשב אותם לפי התבנית היסודית הראשונה בלבד:

$$\Gamma_{ij}^{l} = \frac{1}{2} g^{kl} \left(g_{ki\prime j} + g_{jk\prime i} - g_{ij\prime k} \right)$$

אופרטור הצורה

$$S = G^{-1} b$$

קווים גיאודזיים

מקיימים את המשוואות:

$$\ddot{\gamma}^{i} + \Gamma_{jk}^{i} \dot{\gamma}^{j} \dot{\gamma}^{k} = 0$$

דוגמה: חצי עליון של כדור: $r = \left(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2} \right)$

$$u = \sin t \qquad v = \cos t \qquad \gamma = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

זוהי פרמטריזציה טבעית, שכן:

$$\dot{\gamma}^{t} G \dot{\gamma} = 1$$

משוואת אויילר־לגרנג'

$$\min \int_{t_1}^{t_2} \mathscr{L} \left(u, v, \dot{u}, \dot{v}, t \right) \, \mathrm{d}t$$

מתקיים כאשר

$$\frac{\partial L}{\partial u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{u}} \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial v}$$

תרגיל

למצוא את הקווים הגיאודזיים על הטורוס

$$x(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}(R+r\cos\theta)\cos\varphi\\(R+r\cos\theta)\sin\varphi\\r\sin\theta\end{pmatrix}$$

פתרון

$$\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}-r\sin\theta\cos\varphi & -(R+r\cos\theta)\sin\varphi\\-r\sin\theta\sin\varphi & (R+r\cos\theta)\cos\varphi\\r\cos\theta & 0\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}r^2 & 0\\0 & (R+r\cos\theta)^2\end{pmatrix}$$

$$s=\int\sqrt{g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2+g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2+2g_{\theta\varphi}\dot{\theta}\dot{\varphi}}\,\mathrm{d}t$$

$$G^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{r^2} & 0\\0 & \frac{1}{(R+r\cos\theta)^2}\end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11\prime1}+g_{11\prime1}-g_{11\prime1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{12\prime1}+g_{12\prime1}-g_{11\prime2}\right)=0$$

$$\Gamma_{12}^1=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{11\prime2}+g_{12\prime1}-g_{12\prime1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{21\prime2}+g_{22\prime1}-g_{12\prime2}=0\right)$$

$$\Gamma_{22}^1=\frac{1}{2}g^{11}\left(g_{21\prime2}+g_{21\prime2}-g_{22\prime1}\right)+\frac{1}{2}g^{12}\left(g_{22\prime2}+g_{22}\cdots\right)=\cdots$$

$$\cdots=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{r^2}-2r\sin\theta\left(R+r\cos\theta\right)\right)=\frac{\sin\theta\left(R+r\cos\theta\right)}{r}$$

$$\Gamma_{11}^2=\frac{1}{2}g^{21}\left(\cdots\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{12\prime1}+g_{12\prime1}-g_{11\prime2}\right)=0$$

$$\Gamma_{12}^2=\frac{1}{2}g^{21}\left(\cdots\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22\prime1}+g_{21\prime2}-g_{21\prime2}\right)=\frac{r\sin\theta}{R+r\cos\theta}=\Gamma_{21}^2$$

$$\Gamma_{22}^2=\frac{1}{2}g^{21}\left(\cdots\right)+\frac{1}{2}g^{22}\left(g_{22\prime2}+g_{22\prime2}-g_{22\prime2}\right)=0$$

$$\ddot{\gamma}^i+\Gamma_{jk}^i\dot{\gamma}^j\dot{\gamma}^k=0$$

$$0=\ddot{\gamma}^1+\xcancel{\Gamma_{11}^1\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^1}+\xcancel{2\Gamma_{12}^1\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2}+\Gamma_{22}^1\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^2$$

$$\boxed{0 = \ddot{\gamma}^1 + \frac{\sin\theta\,(R+\cos\theta)}{r}\left(\dot{\gamma}^2\right)^2}$$

$$0 = \ddot{\gamma}^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2$$

$$\boxed{0 = \ddot{\gamma}^2 + 2\frac{r\sin\theta}{R+r\cos\theta}\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2}$$

מכיוון שהמשוואות הגיאודזיות נותנות עקומות בפרמטריזציה טבעית, אפשר להחליף את אחת המשוואות במשוואה

$$g_{11}\left(\dot{\gamma}^1\right)^2 + g_{22}\left(\dot{\gamma}^2\right)^2 = 1$$

ואז

$$r^2\left(\dot{\gamma}^1\right)^2 + (R+r\cos\theta)^2\left(\dot{\gamma}^2\right)^2 = 1$$

$$\left(\dot{\gamma}^2\right)^2 = \frac{1-r^2\left(\dot{\gamma}^1\right)^2}{(R+r\cos\theta)^2}$$

$$0 = \ddot{\gamma}^1 + \frac{\sin\theta\,(R+r\cos\theta)}{r}\cdot\frac{1-r^2\left(\dot{\gamma}^1\right)^2}{(R+r\cos\theta)^2}$$

ואפשר לנסות ולהמשיך לפתור...

פתרון לפי משוואות אויילר לגרנג'

$$s = \int\sqrt{g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + g_{\varphi\varphi}\dot{\varphi}^2 + 2g_{\theta\varphi}\dot{\theta}\dot{\varphi}}\,\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{L} = \gamma^2\dot{\theta}^2 + (R+r\cos\theta)^2\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2r^2\dot{\theta}\right) = -2\,(R+r\cos\theta)\,r\sin\theta\dot{\varphi}^2$$

$$\cancel{2}r^2\ddot{\theta} = -\cancel{2}\,(R+r\cos\theta)\,r\sin\theta\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = \mathrm{const}$$

$$2\,(R+r\cos\theta)^2\,\dot{\varphi} = \mathrm{const}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{c_1}{(R + r\cos\theta)^2}$$

$$r^2\ddot{\theta} = (R + r\cos\theta)\, r\sin\theta \frac{c_1^2}{(R + r\cos\theta)^2}$$