פתרון תרגיל בית 4 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א' תשפ"ג

שאלה 1 (חימום)**.** יהיו $f\colon G\to H$ ו-$g\colon H\to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g\circ f\colon G\to K$ היא גם הומומורפיזם.

פתרון. נתון שלכל $g_1,g_2\in G$ מתקיים $f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)$, ושלכל $h_1,h_2\in H$ מתקיים $g(h_1h_2)=g(h_1)g(h_2)$. בפרט זה נכון עבור $h_i=f(g_i)$. לכן לכל $g_1,g_2\in G$ מתקיים

$$(g\circ f)(g_1g_2)=g(f(g_1g_1))=g(f(g_1)f(g_1))=g(f(g_1))g(f(g_1))=(g\circ f)(g_1)(g\circ f)(g_2)$$

ולכן $g\circ f$ הומומורפיזם.

ודאו שאתם יודעים לנסח טענות דומות לאפימורפיזמים, מונומורפיזמים ואיזומורפיזמים.

שאלה 2. תהינה G,H חבורות ויהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם. הוכיחו כי f חח"ע אם ורק אם $\ker f=\{e_G\}$.

פתרון. לכיוון הראשון, נניח שההומומורפיזם f חח"ע. מהנתון ש-f הומומורפיזם נזכר כי $f(e_G)=e_H$. לכל $x\in\ker f$ מתקיים

$$f(x)=e_H=f(e_G)$$

מהחח"ע של f נובע כי $x=e_G$. כלומר e_G הוא האיבר היחיד ששנשלח ל-e_H, ולכן $\ker f=\{e_G\}$.

לכיוון השני, נניח כי $\ker f=\{e_G\}$. נניח שעבור g_1,g_2 מתקיים $f(g_1)=f(g_2)$, ונרצה להראות שגם $g_2=g_1$. אם כן, $f(g_1)f(g_2)^{-1}=e_H$ ומכיוון שזהו הומומורפיזם מתקיים: $f(g_1g_2^{-1})=e_H$. לכן $g_1g_2^{-1}\in\ker f$ ומהנתון על הגרעין נקבל $g_1g_2^{-1}=e_G$, ולכן $g_1=g_2$. כלומר f חח"ע.

שאלה 3 (חזרה)**.** תהי G חבורה, ויהיו $a,b\in G$ איברים מסדר סופי.

הוכיחו שאם a ו-b מתחלפים, אז ab הוא מסדר סופי. הפריכו זאת כאשר הם לא מתחלפים.

פתרון. נסמן $n=o(a)$ ו-$m=o(b)$, ולפי ההנחה הם מספרים טבעיים.

אם a ו-b מתחלפים, נראה כי $o(ab)\leq nm$ לפי החישוב:

$$(ab)^{nm}\overset{\star}{=}a^{nm}b^{nm}=(a^n)^m(b^m)^n=e^me^n=e$$

כאשר בשיוויון המסומן $\star$ השתמשנו בנתון. שימו לב כי G לא בהכרח אבלית.

הנה דוגמה נגדית למקרה שבו G אינה אבלית: נבחר את $GL_2(\mathbb{R})$, ונתבונן באיברים

$$a=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\qquad b=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$$

ניתן לבדוק שמתקיים: $a^4 = b^3 = I$ ושהם לא מתחלפים. האיבר $ab = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ אינו מסדר סופי כי $(ab)^n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, שלאף $n \in \mathbb{N}$ לא יהיה מטריצת היחידה (שהיא איבר היחידה בחבורה).

שאלה 4. לכל תמורה σ מהתמורות הבאות, כתבו את σ כמכפלת מחזורים זרים וחשבו את σ^2, את σ^{10} ואת $o(\sigma)$.

א. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_7$

ב. $\sigma = (3\ 1\ 2)\,(1\ 4\ 5)\,(2\ 3)\,(4\ 3\ 5) \in S_5$

ג. $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2^2 \in S_4$, כאשר $\tau_1 = (2\ 3\ 4)$ ו-$\tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

פתרון. נשתמש בכך שכל שתי תמורות זרות מתחלפות.

א. מתקיים כי $\sigma = (1\ 7\ 6\ 4\ 5\ 2)$. מכיוון ש-$\sigma$ מחזור באורך 6 מתקיים כי $o(\sigma) = 6$ ובפרט $\sigma^6 = \mathrm{id}$. כעת נחשב:

$$\sigma^2 = (1\ 7\ 6\ 4\ 5\ 2)^2 = (1\ 6\ 5)\,(2\ 7\ 4)$$
$$\sigma^{10} = \sigma^6\sigma^4 = \sigma^4 = \left(\sigma^2\right)^2 = (1\ 6\ 5)^2\,(2\ 7\ 4)^2 = (1\ 5\ 6)\,(2\ 4\ 7)$$

ב. תחילה נחשב את σ:

$$\begin{aligned}
\sigma &= (3\ 1\ 2)\,[(1\ 4\ 5)\,(2\ 3)]\,(4\ 3\ 5) \\
&= (3\ 1\ 2)\,[(2\ 3)\,(1\ 4\ 5)]\,(4\ 3\ 5) \\
&= [(3\ 1\ 2)\,(2\ 3)]\,[(1\ 4\ 5)\,(4\ 3\ 5)] \\
&= (1\ 2)\,(1\ 4\ 3) \\
&= (1\ 4\ 3\ 2)
\end{aligned}$$

לכן $o(\sigma) = 4$ ובפרט $\sigma^4 = \mathrm{id}$. כעת נחשב:

$$\sigma^2 = (1\ 4\ 3\ 2)^2 = (1\ 3)\,(2\ 4)$$
$$\sigma^{10} = \left(\sigma^4\right)^2\sigma^2 = \sigma^2 = (1\ 3)\,(2\ 4)$$

ג. מתקיים כי $\tau_2 = (1\ 2\ 4\ 3)$. כעת נחשב את σ:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \tau_1 \circ \tau_2^2 \\
&= (2\ 3\ 4)\,(1\ 2\ 4\ 3)^2 \\
&= (2\ 3\ 4)\,(2\ 3)\,(1\ 4) \\
&= (2\ 4)\,(1\ 4) \\
&= (1\ 2\ 4)
\end{aligned}$$

לכן $o(\sigma) = 3$ ובפרט $\sigma^3 = \mathrm{id}$. לבסוף:

$$\sigma^2 = (1\ 2\ 4)^2 = (1\ 4\ 2)$$
$$\sigma^{10} = \left(\sigma^3\right)^3\sigma = \sigma = (1\ 2\ 4)$$

שאלה 5. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה, ונגדיר את התומך של σ להיות

$$\mathrm{supp}(\sigma) = \{i \,|\, \sigma(i) \neq i\}$$

במילים אחרות, אלו הם המספרים ש-σ "מזיזה". נאמר ששתי תמורות σ ו-τ הן זרות אם $\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \varnothing$.

א. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שאינן מתחלפות.

ב. תנו דוגמה לתמורות לא זרות שמתחלפות.

ג. הוכיחו שאם $i \in \mathrm{supp}(\sigma)$, אז גם $\sigma(i) \in \mathrm{supp}(\sigma)$.

ד. הוכיחו שכל זוג תמורות זרות מתחלף.

פתרון.

א. נבחר $\sigma = (1\ 2)$ ו-$\tau = (1\ 2\ 3)$. מתקיים כי $1 \in \mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau)$ ולכן $\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) \neq \varnothing$. יתר על

$$\sigma\tau = (1\,2)(1\,2\,3) = (2\,3)$$
$$\tau\sigma = (1\,2\,3)(1\,2) = (1\,3)$$

ולכן $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

ב. נבחר $\sigma = \tau = (1\ 2) \in S_2$. מתקיים כי $\mathrm{supp}(\sigma) = \mathrm{supp}(\tau) = \{1,2\} \neq \varnothing$ ובפרט $\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \{1,2\} \neq \varnothing$.

ג. נניח $i \in \mathrm{supp}(\sigma)$. לפי הגדרה $\sigma(i) \neq i$. מכיוון ש-σ חד-חד ערכית, נובע ש-$\sigma(\sigma(i)) \neq \sigma(i)$ ולכן $\sigma(i) \in \mathrm{supp}(\sigma)$.

ד. יהיו σ, τ תמורות זרות ב-S_n צריך להוכיח כי σ, τ מתחלפות. נרשום שתי הוכחות.

הוכחה ראשונה. נרשום $\sigma = \prod_j \sigma_j$, $\tau = \prod_k \tau_k$ כמכפלות סופיות של מחזורים זרים מאורך גדול מ-1. לפי הגדרה $\mathrm{supp}(\sigma)$ שווה לאיחוד כל האיברים המשתתפים באחד המחזורים בפירוק של σ, וטענה דומה לגבי τ. לכן σ_j, τ_k זרים לכל j, k ואז σ, τ מתחלפות. $\square$

הוכחה שנייה. שקול להוכיח $\sigma\tau = \tau\sigma$. באופן שקול צריך להוכיח $\sigma(\tau(i)) = \tau(\sigma(i))$ לכל $i \in \{1, \ldots, n\}$. מכיוון ש-$\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau) = \varnothing$, יש שלושה מקרים אפשריים. נוכיח את הטענה בכל אחד מהם: $\square$

(א) $i \notin \mathrm{supp}(\sigma)$ וגם $i \notin \mathrm{supp}(\tau)$. במקרה זה $\sigma(i) = i = \tau(i)$ ולכן $\sigma(\tau(i)) = i = \tau(\sigma(i))$.

(ב) $i \in \mathrm{supp}(\sigma)$ וגם $i \notin \mathrm{supp}(\tau)$. מסעיף 3 אנו יודעים כי $\sigma(i) \in \mathrm{supp}(\sigma)$. מכיוון ש-$\sigma, \tau$ זרות בהכרח $\sigma(i) \notin \mathrm{supp}(\tau)$ או ברישום אחר $\tau(\sigma(i)) = \sigma(i)$. מההנחה $i \notin \mathrm{supp}(\tau)$ מקבלים כי $\tau(i) = i$. נרכיב σ על שני האגפים ונקבל $\sigma(\tau(i)) = \sigma(i)$. לבסוף נקבל $\tau(\sigma(i)) = \sigma(i) = \sigma(\tau(i))$.

(ג) $i \notin \mathrm{supp}(\sigma)$ וגם $i \in \mathrm{supp}(\tau)$. ההוכחה סימטרית למקרה ב'.

שאלה 6. תהיינה G, H חבורות. האם כל תת־חבורה K של $G \times H$ היא בהכרח מהצורה $K_1 \times K_2$, כאשר K_1 תת־חבורה של G ו-K_2 תת־חבורה של H? הוכיחו או תנו דוגמה נגדית.

פתרון. נבנה דוגמה נגדית. נבחר $G=H=\mathbb{Z}_2$, $K=\{(0,0),(1,1)\}$. אזי K תת־חבורה של G. נגדיר $p_1:K\to G$ ו-$p_2:K\to H$ להיות ההטלות הטבעיות. אם קיימות תתי חבורות $K_1\leq G$ ו-$K_2\leq H$ כך ש-$K=K_1\times K_2$ אזי $K_1=p_1(K)=G$ וגם $K_2=p_2(K)=H$. לכן $K=G\times H$, סתירה.

שאלה 7. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא מוגדרת היטב, הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{10}$ המוגדרת לפי $f(n)=(n \bmod 10,\, n \bmod 10)$.

ב. $f\colon\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ המוגדרת לפי $f(\frac{a}{b})=(a,b)$.

ג. $f\colon\mathbb{C}^*\to\mathbb{C}^*$ המוגדרת לפי $f(x)=x^4$.

ד. $f\colon S_5\times S_5\to S_5\times S_5$ המוגדרת לפי $f(\sigma,\tau)=(\tau,\sigma)$.

ה. $f\colon\mathbb{R}\to SL_2(\mathbb{R})$ המוגדרת לפי

$$f(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

פתרון. ההוכחות כאן לא מלאות! בקיצור: צריך להוכיח טענות שצריך להוכיח. למשל אם כתוב שלאיבר $(0,1)$ אין מקור בסעיף הראשון, אז צריך להוכיח את זה. אם אומרים בסעיף השלישי ש-f היא אפימורפיזם, אז צריך להוכיח שהיא גם הומומורפיזם וגם על, וכן הלאה לטענות אחרות.

א. פונקציה זו היא אכן הומומורפיזם. עם זאת, היא לא אפימורפיזם (אלא אם במקום $\mathbb{Z}_{10}$ היינו בוחרים את $\mathbb{Z}_1$ ואז זה ברור). למשל לאיבר $([0],[1])$ אין מקור. זה גם לא מונומורפיזם כי למשל $f(0)=f(10)$ בעוד ש-$10\neq 0$ בחבורה $\mathbb{Z}$.

ב. הפונקציה הזו לא מוגדרת היטב. למשל

$$f(\frac{1}{2})=(1,2)\neq(2,4)=f(\frac{2}{4})$$

בעוד ש-$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. לכן לא מדובר בהומומורפיזם או שאר האפשרויות.

ג. הפונקציה היא אפימורפיזם, אבל לא מונומורפיזם. למשל $f(1)=f(i)=f(-1)=1$.

ד. הפונקציה הזו היא איזומורפיזם. הפונקציה היא ההופכית של עצמה. לתכונת ההומו-מורפיזם נבדוק שלכל $(\sigma,\tau),(\sigma',\tau')\in S_5\times S_5$ מתקיים

$$\begin{aligned}f((\sigma,\tau)(\sigma',\tau'))&=f(\sigma\sigma',\tau\tau')\\&=(\tau\tau',\sigma\sigma')\\&=(\tau,\sigma)(\tau',\sigma')\\&=f(\sigma,\tau)f(\sigma',\tau')\end{aligned}$$

וזו בדיקה שכמו בשאר הסעיפים אי אפשר לוותר עליה בפתרון מלא.

ה. הפונקציה הזו היא הומומורפיזם. אכן, לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\begin{aligned} f(\alpha)f(\beta) &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} = f(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

לפי זהויות טריגונומטריות ידועות. אבל f לא אפימורפיזם (למשל כי באלכסון האיברים שווים, ואפשר למצוא איברים ב-$SL_2(\mathbb{R})$ שאיברי האלכסון שלהם שונים) וגם לא מונומורפיזם (למשל כי $f(\alpha) = f(\alpha + 2\pi)$ לכל $\alpha \in \mathbb{R}$).

שאלה 8 (רשות)**.** תהינה תמורות $\sigma, \tau \in S_n$. הוכיחו שאם $|\mathrm{supp}(\sigma) \cap \mathrm{supp}(\tau)| = 1$, אז $\sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ הוא מחזור מאורך 3.

רמז: הראו כי $\mathrm{supp}(\sigma^{-1}) = \mathrm{supp}(\sigma)$ לכל תמורה ובדקו לאן נשלח המספר ששייך לחיתוך התומכים.

בהצלחה!