פיתרון תרגיל בית 4 במתמטיקה בדידה 2
83־118 סמסטר ב' תשע"ח

24 באפריל 2018

1. כמה סדרות של n מספרים שלמים $(a_1, ..., a_n)$ יש המקיימים: $1 \leq a_1 \leq ... \leq a_n$, ובנוסף $a_i \leq i$ לכל $1 \leq i \leq n$?

פיתרון התשובה היא שזהו מספר קטלן C_n. נראה התאמה להילוכי סריג מ־$(0,0)$ ל־(n,n) שעוברים מתחת לישר $x = y$. נשים לב (תבינו למה, כי במבחן תצטרכו להסביר את עצמכם) שכל הילוך נקבע לפי סדרת הגבהים של הכניסות לעמודה ה־i, לכל $1 \leq i \leq n$. לכן, כל סדרה $(a_1, ..., a_n)$ נתאים לסדרת הגבהים $(a_i - 1, ..., a_n - 1)$ (מורידים 1 כיון שהגובה המקסימלי להיכנס לעמודה ה־i הוא $i - 1$), וזו התאמה חח"ע ועל לפי ההתאמה ההופכית, שאת סדרת הגבהים ממירה לסדרה, ע"י הוספת 1 לכל איבר.

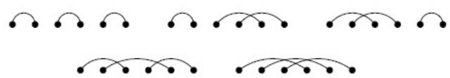
2. כמה סדרות של n אחדות (1) ו־ n "מינוס אחדות" (-1) יש, כך שכל הסכומים החלקיים הינם אי־שליליים?

פיתרון זהו מספר קטלן C_n. נראה זאת ע"י העתקה חח"ע ועל למחרוזות הסוגריים המאוזנות: פשוט נעתיק כל 1 ל"פותח" וכל -1 ל"סוגר". זו פונקציה חח"ע ועל כי הרכבה עם הפונקציה ההופכית (התאמת פותח ל־1 וסוגר ל־-1) תתן את הזהות בשני הצדדים. הסכומים החלקיים האי־שליליים מבטיחים שנקבל מחרוזת מאוזנת.

3. א. כמה אפשרויות יש להכניס את האיברים $\{1, ..., n\}$ בסדר עולה לתור ולהוציאם ממנו (כלומר, מי שנכנס ראשון יוצא ראשון, וניתן להוציא לפני שכולם נכנסו)?
ב. כמה אפשרויות יש להכניס את האיברים $\{1, ..., n\}$ בסדר עולה למחסנית ולהוציאם ממנה (כלומר, מי שנכנס ראשון יוצא אחרון, וניתן להוציא לפני שכולם נכנסו)?

פיתרון נפתור בבת אחת, כאשר שינויים לסעיף ב יופיעו בסוגריים: נתאים כל סדרת הוצאות והכנסות למחרוזת סוגריים ע"י: הכנסת איבר תותאם ל"פותח" והוצאת איבר ל"סוגר". זו התאמה חח"ע ועל ע"י התבוננות בהתאמה ההופכית שתתאים לכל מחרוזת את הסדרה באופן הבא: כל פותח יותאם להכנסה, וסוגר יותאם להוצאת האיבר הראשון שהוכנס וטרם הוצא (בסעיף ב ־ לאיבר האחרון שהוכנס וטרם הוצא).

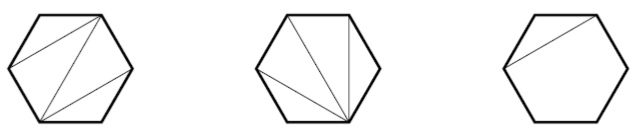
4. נתבונן ב־$2n$ נקודות על ישר. אנו רוצים לחבר זוגות ע"י קשת מעל הנקודות באופן שאין אף קשת ממש מעל קשת אחרת. כמה אפשרויות יש לעשות זאת? דוגמא עבור $n=3$:



איור 1:

פיתרון נתאים קשתות כנ"ל למחרוזות סוגריים ע"י: כל קשת (i,j) כאשר $i<j$ תותאם להשמת "פותח" במקום ה־i ו"סוגר" במקום ה־j. ההתאמה ההופכית, לצורך בדיקת חח"ע ועל, תהיה להתאים למחרוזת בחירת קשתות באופן הבא: "פותח" יותאם להתחלת קשת, ו"סוגר" יסגור את הקשת הראשונה שנפתחה וטרם נסגרה (בדומה לרעיון של הכנסה והוצאה לתור). לכן מספר הקשתות הנ"ל הוא מספר קטלן C_n.

5. יהי מצולע P בן $n+2$ צלעות. אלכסון של מצולע P הוא קו המחבר שני קודקודים של P ונמצא בחלקו הפנימי. נאמר ששני אלכסונים לא נחתכים אם אין להם נקודה משותפת בחלקו הפנימי של P. שילוש של מצולע הוא חלוקה שלו למשולשים על ידי קבוצה מקסימלית של אלכסונים לא נחתכים. לדוגמא:



איור 2:

כאשר במשושה מצד ימין מסומן רק אלכסון אחד, ומצד שמאל ובאמצע 2 שילושים שונים.
א. הוכיחו בעזרת אינדוקציה כי כל מצולע משוכלל בן $n+2\geq 3$ צלעות ניתן לשילוש ושיש בשילוש $n-1$ אלכסונים. מותר להניח שכל אלכסון במצולע נמצא בחלקו הפנימי של המצולע (זה נקרא מצולע קמור). (ניתן להוכיח גם שכל מצולע ניתן לשילוש).
ב. כמה שילושים אפשריים יש למצולע משוכלל בן $n+2$ צלעות? הדרכה: נסמן את הקודקודים ב $v_0,v_1,\ldots,v_{n+1}$. הקשת v_0,v_{n+1} נמצאת באיזשהו משולש בשילוש המצולע, ובחירת הקודקוד מחלקת לשני תתי מצולעים. היעזרו בנוסחת הנסיגה שראינו בתרגול. (עבור $n=0$ הניחו שיש 'שילוש' אחד).

פיתרון א. נוכיח באינדוקציה על n. עבור $n=1$, ברור שהטענה נכונה וניתן לשלש משולש בעזרת $n-1=0$ אלכסונים. הרי המצולע הוא כבר משולש. יהי $n>1$ ונניח את נכונות הטענה לכל $1\leq k<n$. נמתח אלכסון כלשהו בין שני קודקודים במצולע (ודאי ניתן לעשות כך, כי המצולע הוא משוכלל, וכל אלכסון בין שני קודקודים נמצא בחלקו הפנימי). האלכסון מחלק את המצולע לשני תת־מצולעים קמורים, שאם לאחד מהם $k+2\geq 3$ צלעות, אז לשני יש $n-k+2$ צלעות. ניתן להבין זאת בכך שהאלכסון שמתחנו משמש כצלע נוספת של שני תת־המצולעים.

לפי הנחת האינדוקציה את תת־המצולע הראשון ניתן לשלש בעזרת $k-1$ אלכסונים, ואת תת־המצולע השני ניתן לשלש בעזרת $n-k-1$ אלכסונים. יחד עם האלכסון הראשון שמתחנו, נקבל כי את המצולע ניתן לשלש עם $(k-1)+(n-k-1)+1=n-1$ אלכסונים.

ב. עבור $n=1$, יש רק את "השילוש הריק", ולכן יש שילוש אחד. בקלות ניתן לשים לב גם כי עבור $n=2$ (ריבוע) יש שני שילושים אפשריים. נראה שמקבלים את מספר קטלן C_n (בעזרת אינדוקציה מלאה, כלומר אחרי הוכחת הבסיס נניח נכונות לכל $2\leq k<n$ ונוכיח ל־n):

נסמן את קודקודי המצולע ב־$v_0, v_1, \dots, v_{n+1}$ בכיוון השעון. נתמקד בצלע v_0v_{n+1} בשילוש כלשהו. ישנן n אפשרויות לקודקוד שלישי במשולש אליו שייכת הצלע: $v_1, \dots, v_n$ (כל צלע נמצאת באיזשהו שילוש). באופן דומה לסעיף הקודם, חילקנו את המצולע לשני תת־מצולעים ($v_0, \dots v_k$, $v_k, \dots v_{n+1}$) בתוספת המשולש $\Delta v_1v_nv_k$. בתת מצולע הראשון יש $k+1$ קודקודים, ולכן ניתן לשלשו, לפי הנחת האינדוקציה ב־C_{k-1} דרכים.בתת המצולע השני יש $n+1-(k-1)=n-k+2$ קודקודים, ולכן ניתן לשלשו ב־C_{n-k} דרכים. נסכום על k לקבל את נוסחת הנסיגה של קטלן $C_n=\sum_{k=1}^{n} C_{k-1}C_{n-k}$.