תרגיל בית 2 - טופולוגיה

שאלה 1

תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה ה p-adic באופן הבא: עבור $p\in\mathbb{N}$ ראשוני מגדירים מטריקה על $\mathbb{Z}$-

$d_p(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \frac{1}{p^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$, עבור $k(x,y)=\max\{i:p^i\,|\,(x-y)\}$.

א. הוכיחו ש $p^n\xrightarrow{d_p}0$.

ב. תארו את הכדור $B_{d_7}\left(3,\frac{1}{49}\right)$ במרחב $(\mathbb{Z},d_7)$.

ג. עבור $t\in\mathbb{Z}$ מצאו דוגמא לסדרה לא קבועה במרחב $(\mathbb{Z},d_3)$ המתכנסת ל- t.

שאלה 2

יהיו $x_1,x_2\in(X,d)$ ו- $r_1,r_2>0$ ויהיו $B(x_1,r_1),B(x_2,r_2)$ כדורים פתוחים שחיתוכם אינו ריק. תהי $p\in B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$, ו - $r=\min\{r_1-d(p,x_1),r_2-d(p,x_2)\}$

הוכיחו ש- $B(p,r)\subseteq B(x_1,r_1)\cap B(x_2,r_2)$.

שאלה 3

יהי (X,d) מרחב אולטרה-מטרי. הוכיחו:

א. לכל $\varepsilon>0$ ולכל $x,y\in X$ $B(x,\varepsilon)=B(y,\varepsilon)$ או $B(x,\varepsilon)\cap B(y,\varepsilon)=\varnothing$.

הסיקו שלכל $\varepsilon>0$, $\{B(x,\varepsilon)\}_{x\in X}$ (ε-כיסוי) חלוקה של X.

ב. $\{x_n\}\subseteq X$ סדרת קושי אם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})=0$.

ג. מצאו דוגמאות נגדיות לסעיפים א וב כאשר (X,d) מרחב מטרי שאינו אולטרה-מטרי.

שאלה 4

במרחב ℓ_∞ הראו שהסדרה $x_n=\left(\frac{n+1}{n},\frac{n+2}{2n},\frac{n+3}{3n},...\right)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

שאלה 5

א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: יהי (X,σ) מרחב מטרי, ויהי (Y,σ_Y) תת מרחב מטרי שלו. תהי $\{x_n\}\subseteq Y$ ו- $y\in Y$. אזי $x_n\xrightarrow{\sigma_Y}y$ אמ"מ $x_n\xrightarrow{\sigma}y$.

נתבונן במרחב $\langle\mathbb{I},d\rangle$ כאשר $\mathbb{I}$ הוא קבוצת המספרים האי-רציונאליים, ו- d היא המטריקה הסטנדרטית המושרית מ- $\mathbb{R}$. נגדיר את הסדרה הבאה:

$$x_n=\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}.$$

ב. הוכיחו שהסדרה $\{x_n\}\subseteq\mathbb{I}$.

ג. הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת בתת המרחב המטרי $\langle\mathbb{I},d\rangle$.

שאלה 6

הוכיחו או הפריכו שקיים שיכון איזומטרי במקרים הבאים:

א) $\{\sqrt{3}-\frac{n}{2n+5}:\ n\in\mathbb{N}\}\to\mathbb{Q}\cap(2004,\infty)$.

ב) $(\mathbb{Z},d_5)\to(\mathbb{Z},d_7)$.

ג) הוכיחו ששני כדורים במרחב נורמי איזומטריים אם ורק אם יש להם אותו רדיוס.

שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: פרופ' מגרל
מתרגל: מני שלוסברג

<u>שאלת אתגר</u> (לא להגשה)

הראו שאם $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי ו- d המטריקה המושרה מהנורמה אזי **לא** קיימים כדורים **שונים** $B(a_1,r_1),B(a_2,r_2)$ כאשר $r_1<r_2$ ו $B(a_1,r_1)\supset B(a_2,r_2)$.

בהצלחה!