אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 2

שאלה 1

מצאו פיתרון למשוואה $x^3-3x^2-3x-3=0$ בשתי דרכים שונות. אחת בעזרת ההצבה $y=u+v$ ואחת בעזרת ההצבה $y=\alpha\cos\theta$ שראינו בשיעור. נמקו היטב את דרך הפיתרון.

בונוס: הראו שהשורשים המתקבלים בשתי הדרכים זהים.

פיתרון

ראשית נציב $x=y+1$. המשוואה תהפוך ל-

$$0=(y+1)^3-3(y+1)^2-3(y+1)-3=$$

$$=y^3+3y^2+3y+1-3y^2-6y-3-3y-3-3=y^3-6y-8$$

לכן מספיק לפתור את $y^3-6y-8=0$ ואז $x=y+1$ יהיה פתרון למשוואה המקורית.

דרך א: נחפש u,v כך ש-$u^3+v^3=8$ ו-$uv=\frac{6}{3}=2$. במקרה זה, אם $u+v$ הוא פיתרון של המשוואה כי:

$$(u+v)^3-6(u+v)-8=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3-6(u+v)-8=$$

$$=(u^3+v^3-8)+3uv(u+v)-6(u+v)=0+6uv(u+v)-6uv(u+v)=0$$

נשים לב שמתקיים $u^3v^3=2^3=8$ ולכן u^3,v^3 הם שורשים של המשוואה הריבועית t^2-8t+8.
שורשי המשוואה הם $t_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-32}}{2}=4\pm\sqrt{8}$. לכן, אם נבחר:

$$u=\sqrt[3]{4+\sqrt{8}},\quad v=\sqrt[3]{4-\sqrt{8}}$$

יתקיים $u^3+v^3=8$ ו-$uv=2$ (קל גם לבדוק זאת ישירות). לכן $y=\sqrt[3]{4+\sqrt{8}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{8}}$ שורש של המשוואה $y^3-6y-8=0$ ולכן $x=\sqrt[3]{4+\sqrt{8}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{8}}+1$ שורש של המשוואה המקורית.

דרך ב: נציב $y=\alpha\cos\theta$ באשר $\alpha=\sqrt{-4\cdot(-6)/3}=\sqrt{8}$. אם נשתמש בזהות $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ נקבל:

$$y^3-6y-8=8\sqrt{8}\cos^3\theta-6\sqrt{8}\cos\theta-8=\frac{8\sqrt{8}(\cos 3\theta+3\cos\theta)}{4}-6\sqrt{8}\cos\theta-8=$$

$$=2\sqrt{8}\cos 3\theta+6\sqrt{8}\cos\theta-6\sqrt{8}\cos\theta-8=4\sqrt{2}\cos 3\theta-8$$

לכן, אם $4\sqrt{2}\cos 3\theta=8$ אז $y=\sqrt{8}\cos\theta$ הוא פיתרון של $y^3-6y-8=0$. זה מתקיים כאשר $\theta=\frac{1}{3}\arccos\sqrt{2}$ (בהכרח θ מספר מרוכב). לכן $x=y+1=\sqrt{8}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\sqrt{2}\right)+1$ פיתרון של המשוואה.

בונוס: נשתמש בעובדות הבאות מאנליזה מרוכבת:

$$\arccos z = -i\ln\left(z+i\sqrt{1-z^2}\right) \qquad \ln\left(re^{i\theta}\right) = \ln r + i\theta + 2\pi i K \qquad \cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$$

(ניתן לחשב arcos ישירות מהנוסחה של cos ע"י פיתרון משוואה ריבועית. ה-K בנוסחת הלוג הוא מספר שלם המתאים לענף של הלוגריתם.)

כעת מתקיים:

$$\sqrt{8}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\sqrt{2}\right) = \sqrt{8}\cos\left(\frac{-i}{3}\ln\left(\sqrt{2}+i\sqrt{1-2}\right)\right) = \sqrt{8}\cos\left(\frac{-i}{3}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{8}}{2}\left(\exp\left(-\frac{i^2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{3}\right) + \exp\left(\frac{i^2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{3}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\sqrt{2}+1\right)^{-\frac{1}{3}}\right) = (*)$$

נשים לב שמתקיים $\sqrt{2}-1 = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \left(\sqrt{2}+1\right)^{-1}$ ולכן:

$$(*) = \sqrt{2}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{1}{3}}\right) = \left(\sqrt{2^3}\left(\sqrt{2}+1\right)\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\sqrt{2^3}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{4+\sqrt{8}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{8}}$$

זה אומר ששני השורשים שקיבלנו משתי הדרכים הם בעצם אותו שורש.

שאלה 2

הביעו פיתרון של המשוואה $x^4 - x + 1$ בעזרת שורש של משוואה ממעלה שלישית מעל $\mathbb{Q}$. ציינו את המשוואה, אין צורך לפתור אותה. [מותר להשתמש רק בשורש של המשוואה ממעלה 3, בארבע פעולות החשבון ובהוצאת שורש ריבועי.] הראו כי הפיתרון שלכם הוא אכן שורש של המשוואה המקורית.

פיתרון

צריך לפתור את המשוואה $x^4 = x - 1$. לכל מספר $u \in \mathbb{C}$ מתקיים $(x^2+u)^2 - x^4 = 2ux^2 + u^2$. נחבר משוואה זו למשוואה $x^4 = x - 1$ כדי לקבל:

$$(x^2+u)^2 = 2ux^2 + x + (u^2-1) = 2u\left(x^2 - \frac{x}{2u} + \frac{u^2-1}{2u}\right)$$

כל x הפותר את המשוואה הזו פותר גם את המשוואה $x^4 = x - 1$ (מחברים חזרה את המשוואה $(x^2+u)^2 - x^4 = 2ux^2 + u^2$ כדי לראות זאת). אם מתקיים $\frac{u^2-1}{2u} = \left(\frac{1}{4u}\right)^2$ אז מתקיים:

$$x^2 - \frac{x}{2u} + \frac{u^2-1}{2u} = x^2 - 2\cdot\frac{x}{4u} + \left(\frac{1}{4u}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{4u}\right)^2$$

כפל ב-$16u^2$ יראה כי התנאי $\frac{u^2-1}{2u} = \left(\frac{1}{4u}\right)^2$ שקול (כאשר $u \neq 0$) ל-$8u(u^2-1) = 1$, כלומר $8u^3 - 8u - 1 = 0$. נניח כי u הוא אכן שורש של המשוואה $8y^3 - 8y - 1 = 0$. אזי לפי מה שעשינו עד כה מספיק לפתור את המשוואה $(x^2+u)^2 = 2u\left(x - \frac{1}{4u}\right)^2$. אם x מקיים את המשוואה $x^2 + u = \sqrt{2u}\left(x - \frac{1}{4u}\right)$ אז הוא גם פותר את המשוואה הקודמת (מעלים בריבוע) ולכן נפתור משוואה זו.

ע"י העברת אגפים נקבל $x^2-\sqrt{2u}x+u+\frac{1}{\sqrt{8u}}=0$. לכן, לפי הנוסחה לפתרון משוואה ממעלה שנייה נקבל:

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2u}\pm\sqrt{2u-4\left(u+\frac{1}{\sqrt{8u}}\right)}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2u}\pm\sqrt{-2u-\sqrt{\frac{2}{u}}}\right)=\sqrt{\frac{u}{2}}\pm\sqrt{-\frac{u}{2}-\sqrt{\frac{1}{8u}}}$$

לסיכום $x=\sqrt{\frac{u}{2}}\pm\sqrt{-\frac{u}{2}-\sqrt{\frac{1}{8u}}}$ באשר u שורש של המשוואה $8y^3-8y-1=0$. (קיימות דרכים נוספות להציג את הפיתרון.)

שאלה 3

יהי x^3+ax^2+bx+c פולינום אי פריק עם שורשים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (כולל ריבוי). שכנעו את עצמכם בעובדות הבאות:

- $a=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$
- $b=\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1$
- $c=-\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

השתמשו בעובדות אלה כדי:

1. להביע את $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$ בעזרת a,b,c. הוכיחו את קביעתכם.
2. להביע את $\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3$ בעזרת a,b,c. הוכיחו את קביעתכם.

פיתרון

פיתרון 1: נשים לב שמתקיים

$$a^2=(-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+2b$$

לכן נובע ש-$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=a^2-2b$.

פיתרון 2: אפשר לפתוח את הנוסחה ל-$a^3=(-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)^3$ ולראות מה מתקבל. דרך אחרת שלדעתי יותר קצרה:

$$-a(a^2-2b)=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+(\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_2)+(\alpha_2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3)+(\alpha_3\alpha_1^2+\alpha_3^2\alpha_1)=(*)$$

נשים לב ש:

$$\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_2=\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\alpha_3)=\alpha_1\alpha_2(-a-\alpha_3)=-a\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=c-a\alpha_1\alpha_2$$

באופן דומה $\alpha_2\alpha_3^2+\alpha_2^2\alpha_3=c-a\alpha_2\alpha_3$ ו-$\alpha_3\alpha_1^2+\alpha_3^2\alpha_1=c-a\alpha_3\alpha_1$. לכן:

$$(*)=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+c-a\alpha_1\alpha_2+c-a\alpha_2\alpha_3+c-a\alpha_3\alpha_1=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+3c-a(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_1)=\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+3c-ab$$

לכן, נובע ש:

$$\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3=-a(a^2-2b)-(3c-ab)=-a^3+2ab+ab-3c=-a^3+3ab-3c$$

שאלה למחשבה: למה המקדמים של המונומים בביטויים הסופיים שהתקבלו (ביטויים כגון $-a^3+3ab-3c$) הם מספרים שלמים?