תורת המשחקים – שיעור 2

משחקים בצורה אסטרטגית

משחקים בצורה אסטרטגית

- נזכר במושג ***משחק בצורה אסטרטגית*** (game in strategic form) שפגשנו בשיעור הקודם.
- הצגנו משחקים כגון:

סטודנט 2

סטודנט 1	A	B
A	60,60	100,50
B	50,100	80,80

הרכיבים למשחק בצורה אסטרטגית:

- יש לנו ***שחקנים*** אשר צריכים לקבל החלטות, החלטות אלה ייקראו ***אסטרטגיות***.

- צירוף מסוים של אסטרטגיות, לדוגמא (A,B) קובע את ***תוצאת המשחק*** לכל אחד מהשחקנים (כלומר שחקנים שונים יכולים לקבל תוצאות שונות מאותו צירוף אסטרטגיות).

- כל שחקן מייחס לתוצאה ערך הנקרא ***תועלת*** או ***תשלום*** שבעזרתו נוכל לקבוע את העדפתו לתוצאות.

משחק בצורה אסטרטגית - הגדרה

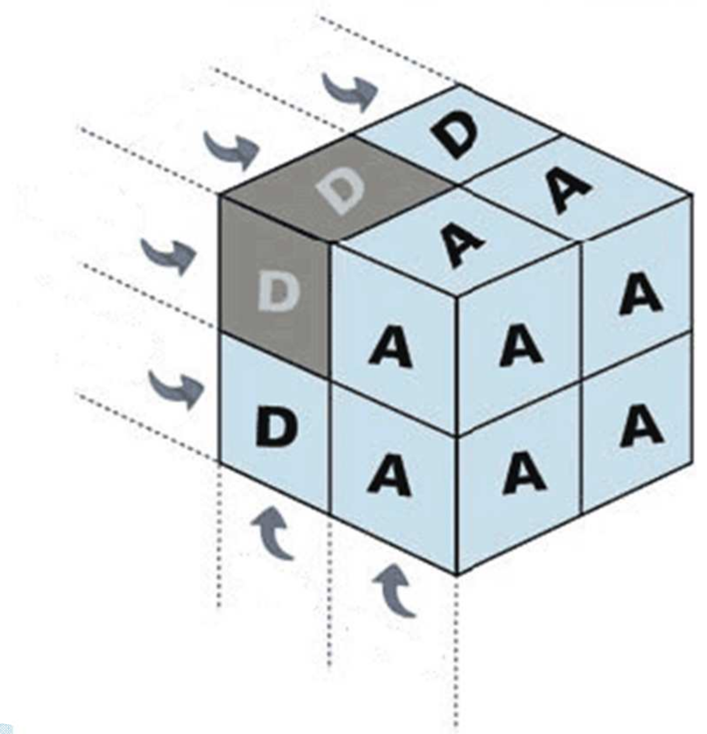
- נסמן ב $N = \{1, 2, 3, \dots n\}$ את קבוצת ***השחקנים***.
- לכל שחקן $i \in N$ נסמן ב S_i את קבוצת ***האסטרטגיות*** של השחקן i.
  נסמן אסטרטגיה ספציפית $s_i \in S_i$.
- ***וקטור אסטרטגיות*** הוא $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$.
- נסמן ב S את קבוצת כל ***וקטורי האסטרטגיות***.
  כלומר $S = \Pi S_i = \{(s_1, \dots, s_n): s_i \in S_i\}$.
- לכל שחקן $i \in N$ נסמן ב $\mathbb{R}$ → $u_i: S$ את ***פונקציית התועלת*** של השחקן.

(שימו לב: דילגנו על שלב התוצאות, מבחינה מתמטית הוא אינו מעניין).

סה"כ: ***משחק בצורה אסטרטגית*** הוא שלשה $\mathrm{G} = (N, (S_i), (u_i))$.

ייצוג בעזרת מטריצה

- ניתן לייצג משחק בין שני שחקנים ע"י מטריצה דו-מימדית, אך משחק בין מספר גדול יותר של שחקנים יש לתאר ע"י מטריצה רב-ממדית.



סימונים

- הגדרנו את S_i להיות קבוצת האסטרטגיות של שחקן i,
נגדיר S_{-i} להיות קבוצת וקטורי האסטרטגיות של כל
השחקנים פרט לשחקן i:

$$S_{-i} = \{(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)\}$$

- נסמן ב $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ וקטור אחד כנ"ל.

אסטרטגיה שולטת חזק

- אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i נקראת ***אסטרטגיה שולטת חזק*** אם לכל אסטרטגיה אחרת שלו $s_i \neq t_i \in S_i$ ולכל צירוף אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים:

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(t_i, s_{-i})$$

דוגמה: דילמת האסיר

אסיר 1 \ אסיר 2	מלשין	שותק
מלשין	6,6	0,10
שותק	10,0	1,1

תרגום לפונקציות תועלת

אסיר 1 \ אסיר 2	מלשין	שותק
מלשין	1,1	5,0
שותק	0,5	4,4

אסטרטגיה נשלטת חזק

- אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i נקראת ***אסטרטגיה נשלטת חזק*** אם *קיימת* אסטרטגיה אחרת שלו $s_i \neq t_i \in S_i$ כך שלכל צירוף אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים:

$$u_i(t_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

- **שימו לב:** ישנו חוסר סימטריה בין ההגדרות שולטת חזק ונשלטת חזק.

שולטת חזק = זו האסטרטגיה הטובה ביותר
נשלטת חזק = קיימת אסטרטגיה טובה יותר

הערות

- אם יש אסטרטגיה שולטת חזק אזי כל אסטרטגיה אחרת היא נשלטת חזק.

- ייתכן שאין אסטרטגיה שולטת חזק אך יש אסטרטגיה נשלטת חזק.

שחקן 2

שחקן 1		L	C	R
	T	1,2	2,3	1,2
	B	2,2	2,0	1,-1

הנחות רציונליות

- **הנחה 1:** שחקן רציונלי לא ישתמש באסטרטגיה נשלטת חזק ויעדיף לבחור באסטרטגיה שולטת חזק.
- **הנחה 2:** כל השחקנים במשחק הם רציונליים.

דוגמה: חניבעל תוקף את רומא

- חניבעל צריך לבחור בין מסלול החוף (קל למעבר) למסלול ההרים (קשה למעבר).
- לחניבעל יש שני גדודים.
- אם הוא בוחר במסלול הקשה הוא מאבד גדוד אחד.
- לרומא אין מספיק כוחות בשביל להגן על שני המסלולים, ובנוסף היא מסוגלת להרוג רק גדוד אחד של חניבעל.

חניבעל – מטריצת המשחק

- פונקצית התועלת של רומא u_1 סופרת כמה גדודים נהרגו לחניבעל.
- פונקצית התועלת של חניבעל u_2 סופרת כמה גדודים שרדו לחניבעל.

		חניבעל	
		הרים	חוף
רומא	חוף	1,1	1,1
	הרים	2,0	0,2

ניתוח המשחק – מזווית הראייה של רומא

- לרומא אין אסטרטגיה שולטת חזק.
- על רומא אם כן לנתח את האסטרטגיה מזווית הראיה של חניבעל.
- אם רומא בוחרת בחוף, אז אין חשיבות בבחירת האסטרטגיה של חניבעל.
- אם רומא בוחרת בהרים, עדיף על חניבעל לבחור בחוף.
- אם כן בשקלול שתי הטענות הנ"ל עדיף על חניבעל לבחור בחוף, למרות שזו לא האסטרטגיה השולטת חזק.
- אם כך עדיף גם על רומא לבחור בחוף.

אסטרטגיה שולטת חלש

- אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i נקראת ***אסטרטגיה שולטת חלש*** אם *לכל* אסטרטגיה אחרת שלו $s_i \neq t_i \in S_i$ ולכל צירוף אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(t_i, s_{-i})$$

וקיים לפחות צירוף אסטרטגיות אחד $t_{-i} \in S_{-i}$ של השחקנים האחרים שעבורו

$$u_i(s_i, t_{-i}) > u_i(t_i, t_{-i})$$

דוגמה:

- ראינו שבמשחק של חניבעל מתקיים שעבור חניבעל אסטרטגית החוף היא אסטרטגיה שולטת חלש

חניבעל

רומא		חוף	הרים
	חוף	1,1	1,1
	הרים	0,2	2,0

שאלה?

- האם יכולות להיות לשחקן 2 אסטרטגיות שונות ששולטות חלש?
- תשובה: לא!
- הוכחה: יהיו $s_i, t_i \in S_i$ שתי אסטרטגיות שולטות חלש. אזי לפי הגדרה קיים צירוף אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ כך ש

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(t_i, s_{-i})$$

סתירה לכך ש t_i שולטת חלש.

אסטרטגיה נשלטת חלש

- אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i נקראת ***אסטרטגיה נשלטת חלש*** אם *קיימת* אסטרטגיה אחרת שלו $s_i \neq t_i \in S_i$ כך שלכל צירוף אסטרטגיות $s_{-i} \in S_{-i}$ מתקיים:

$$u_i(t_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$$

ובנוסף קיים לפחות צירוף אחד $s_{-i} \in S_{-i}$ כך ש

$$u_i(t_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

מושג הפתרון במשחק בצורה אסטרטגית

- הגדרה: אם לכל אחד מהשחקנים יש אסטרטגיה שולטת חזק, צירוף אסטרטגיות אלה נקרא **פתרון המשחק באסטרטגיות שולטות חזק**.

- הגדרה: אם לכל אחד מהשחקנים יש אסטרטגיה שולטת חלש, צירוף אסטרטגיות אלה נקרא **פתרון המשחק באסטרטגיות שולטות חלש**.

סילוק של אסטרטגיות נשלטות חזק

- אם שני השחקנים הם רציונליים, היינו רוצים למחוק אסטרטגיות נשלטות חזק מהמטריצה (כיוון שאף שחקן לא ייבחר באופציה כזו).
- לאחר המחיקה ניתן לנתח את המטריצה שוב, ולבדוק האם יש עדיין אסטרטגיות נשלטות חזק.
- ייתכן שאסטרטגיה שאינה נשלטת חזק תהפוך לשכזו לאחר מחיקה של אסטרטגיה אחרת.

דוגמה 1

שחקן 2

שחקן 1	L	C	R
T	1,0	1,2	0,1
M	0,3	0,1	2,0
B	-1,2	-2,0	-1,-1

דוגמה 2

		L	C	R
שחקן 1	T	1,2	2,3	1,2
	B	2,2	2,0	1,-1

(שחקן 2 מעל העמודות)

- מסקנה: לא כל תהליך מחיקת שורות מסתיים במשבצת אחת.

ידיעה משותפת של רציונליות

- למעשה לא ניתן סתם כך למחוק אסטרטגיות נשלטות חזק. יש לקבל הנחות מסוימות לגבי השחקנים.
- הרי כדי למחוק את השורה, צריכה להיות וודאות שכל השחקנים יודעים שהאסטרטגיה אינה רלוונטית.
- כלומר אם האסטרטגיה הנשלטת חזק היא של שחקן 1, אזי כדי למחוק אותה צריך ששחקן 1 יהיה רציונלי, וששחקן 2 ידע ששחקן 1 רציונלי.
- אך למעשה צריך יותר מזה, שחקן 1 צריך לדעת ששחקן 2 יודע ששחקן 1 הוא רציונלי.
- וגם זה אינו מספיק.... צריך להמשיך את השרשרת עד אינסוף.

הנסיכה הקסומה: ויזיני מול האיש במסכה

- http://www.youtube.com/watch?v=0sPVEBAtwmg
- ויזיני מנסה להעריך את הרציונליות של האיש במסכה, אך האם יש לכך בכלל משמעות? נסו לנתח את המטריצה של המשחק.

סדר הסילוק של אסטרטגיות נשלטות חזק

<u>משפט:</u> סדר הסילוק של אסטרטגיות נשלטות חזק אינו רלוונטי. כלומר המטריצה הסופית לאחר כל סדר סילוק תהיה זהה.

<u>הוכחה:</u>

- נסמן ב $G_0 = G$ את המשחק המקורי.
- נסמן ב G_k את המשחק המתקבל ע"י מחיקת שורה במשחק G_{k-1}, עבור $k \geq 1$.
- אם במשחק G_k אסטרטגיה $s_i \in S_i$ של שחקן i נשלטת חזק ע"י אסטרטגיה $t_i \in S_i$ אזי s_i ממשיכה להיות נשלטת חזק (לאו דווקא ע"י t_i) בכל משחק G_j עבור $j > k$ בו s_i עדיין קיימת.
- המשך ←

המשך הוכחת סילוק

- כעת נניח שבסדר סילוק מסויים יש לנו את הסדרה $s_{i_1,1}, \dots, s_{i_n,n}$

- תהי $t_{j_1,1}, \dots, t_{j_k,k}$ סדרה אחרת. אזי בכל שלב בסדרה, עדיין ניתן לסלק את $s_{i_1,1}$ ולכן ניתן לסלק את כל אברי הסדרה הראשונה בכל שלב, אפילו אם חלק מאברי הסדרה הראשונה כבר נמחקו.

סילוק של אסטרטגיות נשלטות חלש

שחקן 2

שחקן 1		L	C	R
	T	1,2	2,3	0,3
	M	2,2	2,1	3,2
	B	2,1	0,0	1,0

סילוק בסדרה אחרת

שחקן 2

שחקן 1		L	C	R
	T	1,2	2,3	0,3
	M	2,2	2,1	3,2
	B	2,1	0,0	1,0

מסקנה: התוצאה המתקבלת ע"י סילוק
אסטרטגיות נשלטות חלש תלויה בסדר הסילוק!