

תרגיל בית 4 אינפי 3

1. האם הגבולות הבאים קיימים? אם כן, מצאו אותם.

(א)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$$

(ב)

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4}$$

(ג)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}{x^2 + y^2}$$

(ד)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}$$

2. ההאם קיים $a \in \mathbb{R}$ כך שהפונקציה הבאה תהיה רציפה בנקודה $(0,0)$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} & xy \neq 0 \\ a & \text{תרחא} \end{cases}$$

3. האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה $(0,0)$?

(א)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases}$$

(ב)

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^4 + y^4) \ln(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{תרחא} \end{cases}$$

4. (א) תהי $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$. תהי x_0 נקודת הצטברות של D .

נניח כי

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$$

כאשר x_0 נקודת הצטברות של כל D_i . אז מתקיים ש

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

אם ורק אם לכל i

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f|_{D_i}(x) = L$$

(רמז: השתמשו בהגדרת גבול לפי היינה)

(ב) הראו כי הטענה לא נכונה אם מחליפים את האיחוד הסופי באיחוד אינסופי.

5. האם הגבולות הבאים קיימים? אם כן, מצאו אותם. מצאו גם את הגבולות החוזרים בכל מקרה (אם הם קיימים).

(א)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$$

(ב)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right) \right)$$

(ג)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

(ד)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + \sin(y)}{x + y}$$