תרגיל בית 5 אינפי 3

1. תהי $E \subseteq \mathbb{R}^2$ קבוצה קומפקטית. פונקציה $f : E \to \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי

$$f(x,y) = x^2 + cos^2(e^{\frac{x}{y}})$$

(מן הסתם נקודות בהן $y = 0$ לא נמצאות ב E) הוכיחו כי קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $(x,y) \in E$ מתקיים $M \leq f(x,y)$.

פתרון. היות ש f רציפה על קבוצה קומפקטית אנחנו יודעים שלפונקציה f קיים מינימום ב E. נסמן את ערך המינימום ב M. לכן קיים $x_0 \in E$ כך ש $f(x_0) = M$ ולכל $x \in E$ מתקיים כי $f(x) \geq M$. כמו כן, ברור ש

$$f(x,y) = x^2 + \cos^2 e^{\frac{x}{y}} \geq 0$$

נניח שקיימים x, y עבורם

$$f(x,y) = x^2 + \cos^2 e^{\frac{x}{y}} = 0$$

זה בהכרח אומר ש

$$x^2 = 0 \quad \cos^2 e^{\frac{x}{y}} = 0$$

אבל זה מכריח ש $x = 0$ ובמצב זה

$$\cos^2 e^{\frac{x}{y}} = \cos^2 1 \neq 0$$

לכן לא קיימים x, y עבורם $f(x,y) = 0$ ולכן בהכרח $f(x,y) > 0$. מכאן ברור ש $f(x_0) = M > 0$ ולכן M מקיים את הדרוש.

2. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת על תחום D, רציפה במ"ש לפי x (כלומר לכל y' הפונקציה $g(x) = f(x,y')$ רציפה במ"ש) ורציפה במ"ש לפי y (כלומר לכל x' הפונקציה $h(y) = f(x',y)$ רציפה במידה שווה). אזי $f(x,y)$ רציפה ב D.

פתרון. הפרכה: ניקח את הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

המוגדרת נניח על המלבן $[-1,1]\times[-1\times 1]$. ראינו כבר שהפונקציה $f(x,y)$ לא רציפה (לוקחים מסלולים שונים וכו') מצד שני נסתכל על הפונקציה

$$f(x,y')$$

אם $y'\neq 0$ אז

$$f(x,y')=\frac{xy'}{x^2+(y')^2}$$

וזה בוודאי רציף ולכן רציף במ"ש בתחום $-1\leq x\leq 1$. אם $y'=0$ אז

$$f(x,0)=0$$

וזה בוודאי רציף במ"ש. באותו אופן מראים כי

$$f(x',y)$$

רציפה במ"ש וזו דוגמא נגדית.

3. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: תהי $f(x,y)$ פונקציה המוגדרת על תחום $D\subseteq\mathbb{R}^2$, רציפה לפי x (כלומר לכל y' הפונקציה $g(x)=f(x,y')$ רציפה) וכן קיים M כך שלכל x' מתקיים $||f(x',y_1)-f(x',y_2)||\leq M|y_1-y_2|$ אזי $f(x,y)$ רציפה ב D.

נכון. תהי (x_0,y_0) נקודה כלשהיא ב D. יהי $\epsilon>0$ ראשית נשים לב ש

$$\begin{aligned}||f(x,y)-f(x_0,y_0)|| &= ||f(x,y)-f(x,y_0)+f(x,y_0)-f(x_0,y_0)||\\ &\leq ||f(x,y)-f(x,y_0)||+||f(x,y_0)-f(x_0,y_0)||\\ &\leq M|y-y_0|+||f(x,y_0)-f(x_0,y_0)||\end{aligned}$$

לפי הרציפות לפי x, קיים δ_1 שעבורו אם

$$|x-x_0|\leq\delta_1$$

אז מתקיים

$$||f(x,y_0)-f(x_0,y_0)||\leq\frac{\epsilon}{2}$$

נבחר

$$\delta<\min\{\frac{\epsilon}{2M},\delta_1\}$$

ואז אם

$$||(x,y)-(x_0,y_0)||\leq\delta$$

אז מתקיים בוודאי ש

$$|x-x_0| \leq \delta \leq \delta_1$$

ולכן

$$||f(x,y_0)-f(x_0,y_0)||$$

וכן מתקיים

$$|y-y_0| \leq \delta \leq \frac{\epsilon}{2M}$$

ולכן

$$M|y-y_0| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

אז בסך הכל

$$||f(x,y)-f(x_0,y_0)| \leq \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

4. האם הפונקציה $f(x,y)=\cos\frac{1}{1-x^2-y^2}$ רציפה במידה שווה על התחומים הבאים?

(א)

$$D_1=\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$$

פתרון. לא. נבחר את הסדרה $a_n = (\sqrt{1-\frac{1}{\pi n}},0)$ ואת הסדרה $b_n = (\sqrt{1-\frac{1}{\pi(n+1)}},0)$. ברור ש $a_n, b_n \in D_1$ ו

$$a_n \to (1,0) \quad b_n \to (1,0)$$

ולכן ממילא

$$||a_n-b_n|| \to 0$$

אבל

$$f(a_n)=\cos\pi n \quad f(b_n)=\cos\pi(n+1)$$

ולכן

$$||f(a_n)-f(b_n)|| = ||\cos\pi n - \cos\pi(n+1)|| = ||(-1)^n 2|| = 2$$

ולכן הפונקציה לא מתכנסת במידה שווה על תחום זה.

(ב)

$$D_2=\{(x,y) \mid 3<x^2+y^2<4\}$$

פתרון. כן. נרחיב את תחום ההגדרה לתחום ההגדרה

$$\{(x,y) \mid 3 \leq x^2+y^2 \leq 4\}$$

זוהי קבוצה סגורה וחסומה ו f רציפה בתחום זה ולכן היא גם רציפה במידה שווה עליו. ממילא f רציפה במידה שווה על D_2.

5. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות בכל נקודה בה הן מוגדרות

(א) $f(x,y) = x^3+3y^2-\frac{x}{y}$

פתרון. i. נגזרת לפי x:

$$f_x^{'}(x,y) = 3x^2 - \frac{1}{y}$$

מוגדרת בכל נקודה שבה f מוגדרת כלומר כל נקודה שבה $y \neq 0$.

ii. נגזרת לפי y:

$$f_y^{'}(x,y) = 6y + \frac{x}{y^2}$$

גם כן מוגדרת בכל נקודה שבה $y \neq 0$.

(ב) $f(x,y) = e^{\cos(xy)}$

פתרון. i. נגזרת לפי x:

$$f_x^{'}(x,y) = e^{\cos(xy)}\sin(xy)y$$

ii. ובאופן סימטרי נגזרת לפי y היא

$$f_y^{'}(x,y) = e^{\cos(xy)}\sin(xy)x$$

שתיהן מוגדרות בכל $\mathbb{R}^2$.

(ג) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

פתרון. נגזרת לפי x:

$$f_x^{'}(x,y,z) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

באופן סימטרי הנגזרות לפי y,z הן:

$$f_y^{'}(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad f_z^{'}(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

כל הנגזרות מוגדרות ב $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$.

ד) $f(x,y,z) = ln(x^3+y^3-z^3)$

פתרון. i. נגזרת לפי x:

$$f_x^{'}(x,y,z) = \frac{1}{x^3+y^3-z^3}\cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3+y^3-z^3}$$

ii. בדומה

$$f_y^{'}(x,y,z) = \frac{3y^2}{x^3+y^3-z^3}, \quad f_z^{'}(x,y,z) = \frac{-3z^2}{x^3+y^3-z^3}$$

כל הנגזרות מוגדרות בנקודות שבהן $x^3+y^3-z^3>0$.

6. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}.$$

האם הן רציפות?

פתרון. יש להפריד בין הנגזרת ב $(0,0)$ לנגזרת במקומות אחרים. בכל נקודה שהיא לא $(0,0)$:

$$f_x^{'}(x,y) = \frac{4xy(x^2+y^2)-2x(2x^2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^3y+4xy^3-4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y^{'}(x,y) = \frac{2x^2(x^2+y^2)-2y(2x^2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4+2x^2y^2-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

בנקודה $(0,0)$ נקבל:

$$f_x^{'}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y^{'}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

לכן הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x^{'}(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$f_y^{'}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^4-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

כעת נותר לבדוק את רציפותן ב $(0,0)$. עבור $f_x^{'}$ נוכל להתקדם על ישר $x = y$.
ולקבל

$$\lim_{x\to 0} f_x^{'}(x,x) = \frac{4x^4}{(2x^2)^2} = 1 \neq 0$$

ולכן $f_x^{'}$ לא רציפה ב $(0,0)$. עבור $f_y^{'}$ נתקדם על הישר $y = 0$ ונקבל:

$$\lim_{x\to 0} f_y^{'}(x,0) = \frac{2x^4}{(x^2)^2} = 2 \neq 0$$

ולכן גם $f_y^{'}$ לא רציפה ב $(0,0)$.