אלגברה לינארית 2 תרגול 1

11 במרץ 2021

1 דטרמיננטה

1.1 הגדרה לפי תמורות ופעולות שורה

הגדרה: תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אז:

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} \cdots A_{n,\sigma(n)}$$

למשל עבור

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

עבור S_3:

חישוב מכפלת איברים מתאימים	הסימן	התמורה
$0 \cdot 2 \cdot 5 = 0$	+	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
$-(0 \cdot 1 \cdot (-1)) = 0$	-	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
$-(6 \cdot (-3) \cdot 5) = 90$	-	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
$(6 \cdot 1 \cdot 2) = 12$	+	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
$0 \cdot (-3) \cdot (-1) = 0$	+	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
$-(0 \cdot 2 \cdot 2) = 0$	-	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

, ולכן בסה"כ: $\det A = 90 + 12 = 102$.

ניתן ללמוד מכאן שדטרמיננטה של מטריצה משולשית זה מכפלת איברי האלכסון.
השפעת פעולות שורה על הדטרמיננטה:

- אם B מתקבלת מA ע"י החלפת שורות $(R_i \leftrightarrow R_j)$ אז $|B| = -|A|$.
- אם B מתקבלת מA ע"י כפל שורה בסקלאר $(R_i \to \alpha R_i)$ אז $|B| = \alpha|A|$.
- אם B מתקבלת מA ע"י הוספת כפולת שורה לשורה אחרת $(R_i + \alpha R_j \to R_i)$ אז $|B| = |A|$.

תרגילים:

1. היעזרו בפעולות שורה על מנת לחשב את דטרמיננטה של

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 16 \\ -3 & -6 & 18 \\ 5 & 12 & 35 \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 & 16 \\ -3 & -6 & 18 \\ 5 & 12 & 35 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{3}R_2 \to R_2}{\overset{\frac{1}{2}R_1 \to R_1}{=}} 2\cdot(-3)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -6 \\ 5 & 12 & 35 \end{pmatrix} \underset{R_3 - 5R_1 \to R_3}{\overset{R_2 - R_1 \to R_2}{=}} -6\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -14 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{R_3 - 3R_1 \to R_3}{=} -6\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & -1 & -14 \\ 0 & 0 & 37 \end{pmatrix} = -6 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 37 = 222$$

2. יהי α סקלאר, ונגדיר $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ע"י:

$$A_{i,j} = \begin{cases} \alpha & i = j \\ 1 & i \neq j \end{cases}$$

חשבו את $\det A$.
פתרון:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix} \underset{R_1 + \sum_{i>1} R_i \to R_1}{=} \begin{vmatrix} \alpha+n-1 & \alpha+n-1 & \cdots & \alpha+n-1 \\ 1 & \alpha & 1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

נשים לב שלכל $i \geq 2$ אם נבצע את הפעולה $R_i - R_1 \to R_i$ נקבל בשורה ה־i אפסים, למעט $A_{ii} = \alpha - 1$, וכל הפעולות הללו לא משנות דטרמיננטה. לכן נקל:

$$(\alpha+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha-1 \end{vmatrix}$$

קיבלנו משולשית, ולכן נותר להכפיל את האלכסון ולקבל:

$$\det A = (\alpha+n-1)(\alpha-1)^{n-1}$$

1.2 תכונות הדטרמיננטה:

- $|AB| = |A||B|$ (כפליות דטרמיננטה)
- $|A^t| = |A|$
- A הפיכה אמ"ם $|A| \neq 0$ (בתרגיל הקודם, נקבל A הפיכה כאשר $\alpha \neq 1, 1-n$)
- אם $|A| \neq 0$ אז $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- לא בהכרח מתקיים: $|A+B| = |A| + |B|$

תרגילים:

1. הוכיחו או הפריכו:

   (א) A הפיכה אמ"ם AA^t הפיכה.
   פתרון:

$$A \text{ invertible}$$

$$\iff$$

$$|A| \neq 0$$

$$\iff$$

$$|A| \cdot |A| \neq 0$$

$$\iff$$

$$|AA^t| = |A| \cdot |A^t| \neq 0$$

$$\iff$$

$$AA^t \text{ invertible}$$

(ב) יהי n אי־זוגי, ותהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אנטי־סימטרית. אזי A לא הפיכה.

פתרון:

$$A^t = -A$$

ולכן:

$$|A| = |A^t| = |-A| \underset{*}{=} (-1)^n |A| \underset{\star}{=} -|A|$$

ולכן

$$2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

ולכן היא לא הפיכה.

(ג) A הפיכה אמ"ם $A + A^t$ הפיכה.

הפרכה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אפשר גם

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$