סמסטר א' (מועד ב'), תשע"ז

1. תהי $A=\left(\begin{array}{ccc}2 & 0 & a-2\\ 1 & 1 & a-2\\ 0 & 0 & a\end{array}\right)\in\mathbb{R}^{3\times3}$

(א) הוכיחו ש-A לכסינה לכל a

(ב) עבור כל ערך של $a\in\mathbb{R}$ מצאו את P ואת D.

פתרון. נמצא את הפולינום האופייני של A

$$0=P_{A}\left(\lambda\right)=\left|\left(\begin{array}{ccc}\lambda-2 & 0 & -a+2\\ -1 & \lambda-1 & -a+2\\ 0 & 0 & \lambda-a\end{array}\right)\right|=\left(\lambda-a\right)\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-2\right)$$

לכן הע"ע הם $\lambda=a,1,2$

- $a\neq1,2$, ישנם שלושה ע"ע ולכן היא לכסינה, אבל בשביל סעיף ב' נמצא את הו"ע

$$V_{a}=N\left(\left(\begin{array}{ccc}a-2 & 0 & -a+2\\ -1 & a-1 & -a+2\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\right)=span\left(\begin{array}{c}1\\ 1\\ 1\end{array}\right)$$

$$V_{1}=N\left(\left(\begin{array}{ccc}-1 & 0 & -a+2\\ -1 & 0 & -a+2\\ 0 & 0 & 1-a\end{array}\right)\right)=span\left(\begin{array}{c}0\\ 1\\ 0\end{array}\right)$$

$$V_{2}=N\left(\left(\begin{array}{ccc}0 & 0 & -a+2\\ -1 & 1 & -a+2\\ 0 & 0 & 2-a\end{array}\right)\right)=span\left(\begin{array}{c}1\\ 1\\ 0\end{array}\right)$$

ובמקרה הזה $P=\left(\begin{array}{ccc}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ ו-$D=\left(\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & a\end{array}\right)$

- $a=1$: נמצא את הו"ע

$$V_{1}=N\left(\left(\begin{array}{ccc}-1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\right)=span\left\{ \left(\begin{array}{c}1\\ 0\\ 1\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\ 1\\ 0\end{array}\right)\right\}$$

$$V_{2}=N\left(\left(\begin{array}{ccc}0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{array}\right)\right)=span\left\{ \left(\begin{array}{c}1\\ 1\\ 0\end{array}\right)\right\}$$

הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי והפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינארים ולכן היא לכסינה במקרה שבו $a=1$ ובמקרה זה $P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

ו- $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

- $a=2$: נמצא את הו"ע

$$V_1=N\left(\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right)=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_2=N\left(\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי והפולינום האופייני מתפרק לגורמים לינארים ולכן היא לכסינה במקרה שבו $a=2$ ובמקרה זה $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

ו- $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

2. מכפלה פנימית:

(א) נגדיר עבור $a=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ את הפעולה

$$\langle a,b\rangle=a_1b_1+2a_1b_2+2a_2b_1+4a_2b_2$$

האם זאת מכפלה פנימית?

פתרון. נוכח את התכונות של מכפלה פנימית

- לינאריות:

$$\begin{aligned}\langle a+\alpha b,c\rangle &= \left\langle\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\right\rangle &=\\ &= \left\langle\begin{pmatrix}a_1+\alpha b_1\\a_2+\alpha b_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}\right\rangle &=\\ &= (a_1+\alpha b_1)c_1+2(a_1+\alpha b_1)c_2+2(a_2+\alpha b_2)c_1+4(a_2+\alpha b_2)c_2 &=\\ &= a_1c_1+2a_1c_2+2a_2c_1+4a_2c_2+\alpha[b_1c_1+2b_1c_2+2b_2c_1+4b_2c_2] &= \langle a,c\rangle+\alpha\langle b,c\rangle\end{aligned}$$

- סימטריות

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle &= \left\langle\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\right\rangle &=\\ &= a_1b_1+2a_1b_2+2a_2b_1+4a_2b_2 &=\\ &= b_1a_1+2b_1a_2+2b_2a_1+4b_2a_2 &= \langle b,a\rangle\end{aligned}$$

* חיובית

$$\begin{aligned}\langle a,a\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= a_1^2+4a_1a_2+4a_2^2 = \\ &= (a_1+2a_2)^2 \geq 0\end{aligned}$$

אך יתכן מצב ש-$a\neq 0$ אבל $\langle a,a\rangle=0$ למשל עבור $a=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ולכן זה לא מכפלה פנימית!

(ב) יהי V ממפ ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית הוכיחו שאם : $\forall u,v\in V$ $\langle T(u),v\rangle=0$ אז $T=0$

פתרון. זה נכון לכל $v\in V$! בפרט עבר $v=T(u)$מכאן

$$\begin{gathered}\forall u,v\in V:\ \langle T(u),v\rangle=0\\ \Downarrow\\ \forall u\in V:\ \langle T(u),T(u)\rangle=0\\ \Downarrow\\ \forall u\in V:\ T(u)=0\\ \Downarrow\\ T=0\end{gathered}$$

(ג) יהי V ממפ מעל $\mathbb{R}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית הוכיחו : $\forall v\in V$ $\langle T(v),v\rangle=0$ אם ורק אם $T*=-T$ רמז קחו $v=v_1+v_2$

פתרון. נעזר ברמז

$$\begin{gathered}\forall v\in V:\ \langle T(v),v\rangle=0\\ \Updownarrow\\ \forall v_1,v_2\in V:\ \langle T(v_1+v_2),v_1+v_2\rangle=0\\ \Updownarrow\\ \forall v_1,v_2\in V:\ \langle T(v_1),v_1\rangle+\langle T(v_2),v_1\rangle+\langle T(v_1),v_2\rangle+\langle T(v_2),v_2\rangle=0\\ \Updownarrow\\ \forall v_1,v_2\in V:\ \langle T(v_2),v_1\rangle+\langle T(v_1),v_2\rangle=0\\ \Updownarrow\\ \forall v_1,v_2\in V:\ \langle v_2,T^*(v_1)\rangle=-\langle T(v_1),v_2\rangle\\ \Updownarrow\\ \forall v_1,v_2\in V:\ \langle T^*(v_1),v_2\rangle=\langle -T(v_1),v_2\rangle\\ \Updownarrow\\ T^*=-T\end{gathered}$$

3. תהי A מטריצה ריבועית מרוכבת המקיימת $A^4=-A^2$

(א) הוכיחו ש-A יש לכל היותר 3 ע"ע שונים.

פתרון. זנתון ש-$A^4=-A^2$ לכן A מאפס את הפולינום

$$f(x)=x^2\left(x^2+1\right)=x^2(x+i)(x-i)$$

לכן הפולינום המינימלי יכול להיות

$$m_A(x)=x^{0/1/2}(x+i)^{0/1}(x-i)^{0/1}$$

ואז הפולינום האופייני יכול להיות

$$p_A(x)=x^{0/1/2}(x+i)^{0/1}(x-i)^{0/1}$$

כלומר יש לכל היותר 3 שורשים

(ב) הוכיחו שאם A לכסינה אז $A^3=-A$

פתרון. לכן הפולינום המינימלי יכול להיות

$$\begin{cases} m_A(x)=x(x+i)(x-i) \\ m_A(x)=x(x-i) \\ m_A(x)=x(x+i) \\ m_A(x)=(x+i)(x-i) \\ m_A(x)=(x-i) \\ m_A(x)=(x+i) \\ m_A(x)=x \end{cases}$$

בכל המקרים ניתן להכפיל בגורם החסר ולהגיע לזה ש- $f(x)=x(x+i)(x-i)=x^3+1$ מאפס את הפולינום.

(ג) נתון ש-Aהנל היא מסדר 3×3 אך לא לכסינה. מצאו את צורת הזורדן האפשריות.

פתרון. כיוון שאינה לכסינה אז הפולינום המינימלי בפולינום המינימלי שלה יש גורמים לינארית שווים כלומר, הפולינום המינילי שלה יכול להיות

i.

$$p_A(x)=x^2$$

ואז צורת הזורדן היא

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{array}\right)$$

ii.

$$p_A(x)=x^2(x+i)$$

ואז צורת הזורדן היא

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & -i & \\ \hline & & & -i \end{array}\right)$$

iii.

$$p_A(x)=x^2(x-i)$$

ואז צורת הזורדן היא

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & i & \\ \hline & & & i \end{array}\right)$$

iv.

$$p_A(x) = x^2 (x-i)(x+i)$$

ואז צורת הזורדן היא

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ \hline & & i & \\ \hline & & & -i \end{array}\right)$$

4. הוכח/הפרך:

(א) תהי A מטריצה ריבועית, ותהי A^t המטריצה המשוחלפת, אזי כל וקטור עצמי של A הוא גם וקטור עצמי של A^t

פתרון. לא נכון, ניקח את

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז ו"ע של Aהוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ועוד שו"ע של A^t יהיה $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(ב) .אם המטריצה A^2לכסינה אז גם A לכסינה

פתרון. לא נכון, ניקח את

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכסינה אבל A היא בלוק זורדן ולכן לא לכסינה.

(ג) אם הפולינום המינימלי של A מתפרק למכפלה של גורמים לינארים, אז A לכסינה

פתרון. לא נכון, ניקח את

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז

$$m_A(x) = x^2$$

אבל A היא בלוק זורדן ולכן לא לכסינה.

(ד) אם A היא מטריצה מרוכבת המקיימת $A^3 = 0$ וגם $A* = -A$ אז המטריצה $U = I + A + \frac{1}{2}A^2$ אוניטרית?

פתרון. נחשב את U^*U ונראה מה נקבל

$$\begin{aligned} U^*U &= \left[I + A + \tfrac{1}{2}A^2\right]^* \left[I + A + \tfrac{1}{2}A^2\right] = \\ &= \left[I - A + \tfrac{1}{2}A^2\right] \left[I + A + \tfrac{1}{2}A^2\right] = \\ &= I + A + \tfrac{1}{2}A^2 - A - A^2 - \tfrac{1}{2}A^3 + \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{2}A^3 + \tfrac{1}{4}A^4 = \\ & I + \tfrac{1}{4}A^4 = I \end{aligned}$$

לכן U אוניטרית

(ה) קיימת מטריצה מרוכבת צמודה לעצמה (הרמיטית) עם פולינום אופייני $\left(x-1\right)^{2}\left(x^{2}+1\right)$

פתרון. לא נכון, נניח בשלילה שקיימת כזאת אז כל העע שלה ממשים כי

$$\lambda\left\langle v,v\right\rangle =\left\langle T\left(v\right),v\right\rangle =\left\langle v,T^{*}v\right\rangle =\left\langle v,Tv\right\rangle =\left\langle v,\lambda v\right\rangle =\overline{\lambda}\left\langle v,v\right\rangle$$

בסתירה לזה קיים ע"ע ששווה ל-$\pm i$

(ו) יהי V ממ"פ ויהיו $u,v,w\in V$. אם u ניצב ל-vו-v ניצב ל-w אז u לא יכול להיות ניצב ל-w.

פתרון. ניקח את

$$u=\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),v=\left(\begin{array}{c}0\\1\\0\end{array}\right),w=\left(\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right)$$

אז כולם מאונכים לכולם