מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 12 (פתרון)

1. נסמן ב- τ_d את הטופולוגיה על $X \times Y$ המושרת על ידי המטריקה d.
נסמן ב- $B_X(x,r), B_Y(y,s)$ כדורים פתוחים במטריקות d_X, d_Y בהתאם.
נתבונן באוסף תת-קבוצות הבא ב-$X \times Y$:
$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\boldsymbol{B_X(x,r)} \times \boldsymbol{B_Y(y,s)} |\ \boldsymbol{x \in X, y \in Y; r, s} \in \mathbb{R}\ \}$
מספיק להוכיח ש-$\mathcal{B}$ בסיס לטופולוגיות $\tau_\times$ ו-τ_d.
$\tau_\times$. יהי $(x,y) \in X \times Y$. אזי $B_X(x,r)$ פתוח במרחב (X, d_X) ו-$B_Y(y,s)$ פתוח במרחב (Y, d_Y). לכו $B_X(x,r) \times B_Y(y,s)$ שייך ל-$\tau_\times$. לפי אחת מהגדרות של בסיס, $\mathcal{B}$ - בסיס של $\tau_\times$, מש"ל.

τ_d. יהי $(x,y) \in X \times Y$. אזי
$B_d\left((x,y), \min\{r,s\}\right) \subseteq B_X(x,r) \times B_Y(y,s)$.

לכן כל איבר $B_X(x,r) \times B_Y(y,s)$ מ-$\mathcal{B}$ פתוח ב-τ_d.
חוץ מזה, אם $(x,y) \ni U \ni \tau_d$, אז קיים $R > 0$ כך ש-$U \subseteq B_d((x,y),R)$.

אבל

$$B_d\big((x,y),R\big) = B_X(x,R) \times B_Y(y,R) \in \mathcal{B}$$

לכן $\mathcal{B}$ בסיס של τ_d לפי אותה ההגדרה, מש"ל.

2. יהי $\rho: X_1 \sqcup X_2 \to X/\sim$ העתקת מנה ,
כלומר $\rho: z \mapsto [z]_\sim$ לכל $z \in X_1 \sqcup X_2$.
ויהיו $U_1, U_2 \subseteq X/\sim$ ו-$0 \in$ $o_1 \in X_1, o_2 \in X_2$
ההעתקים של 0.
אזי $\{o_1\} \cup \{o_2\} = \rho^{-1}(\{0\}) \subseteq \rho^{-1}(U_1)$
ו- $\{o_1\} \cup \{o_2\} = \rho^{-1}(\{0\}) \subseteq \rho^{-1}(U_2)$.
ρ רציפה לכן $\rho^{-1}(U_1), \rho^{-1}(U_2)$ – פתוחות
בטופולוגיה של איחוד זר. מזה נובע בפרט
ש-$\rho^{-1}(U_1) = V_1 \sqcup W_1$ כאשר V_1 פתוחה ב-X_1
ו-W_1 פתוחה ב-X_2. חוץ מזה $\{o_1\} \subseteq V_1$. מכיוון
ש - $o_1 = 0$ ו-$X_1 = \mathbb{R}$, קיים $\delta_1 > 0$ כך
ש-$(-\delta_1, \delta_1) \subseteq \rho^{-1}(U_1) \cap X_1$.
בדיוק באותה לוגיקה קיים $\delta_2 > 0$ כך
ש-$(-\delta_2, \delta_2) \subseteq \rho^{-1}(U_2) \cap X_2$.
אם נסמן $\delta \coloneqq \min\{\delta_1, \delta_2\}$ נקבל :

$$(-\delta, 0) \subseteq \rho^{-1}(U_1) \cap X_1$$
$$(-\delta, 0) \subseteq \rho^{-1}(U_2) \cap X_2$$

חשוב להדגיש שבשתי מהכלות האלה מתכוונים לשני ההעתקים <u>הלא נחתכים</u> של הקטע $(-\boldsymbol{\delta}, \mathbf{0})$!

נבטא את זה בסימון ונרשום (כבר למרחב X):

$$(-\delta, 0)_1 \subseteq \rho^{-1}(U_1)$$

$$(-\delta, 0)_2 \subseteq \rho^{-1}(U_2)$$

אם נקח תמונות - של הפונקציה ρ - של שני האגפים בהכלות האלה, אז נקבל במרחב $X/\sim$ לפי הגדרת $\sim$:

$$\rho((-\delta, 0)_1) = \rho((-\delta, 0)_2) \subseteq U_1 \cap U_2$$

לכן $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, מש"ל.

3. יהיו $f: X \to Y$ ו- $g: Y \to Z$ העתקות מנה.

נסמן: $h = g \circ f$.

מכיוון ש- f, g העתקות על רציפות, גם h העתקת על רציפה (כהרכבה).

נותר להוכיח שאם $h^{-1}(W)$ פתוחה עבור תת-קבוצה W של Z כולשהי, אז גם W פתוחה.

יהי $W \subseteq Z$ כך ש- $h^{-1}(W)$ פתוחה. אזי:

$(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$ פתוחה כי h רציפה. לכן $g^{-1}(W)$ פתוחה כי f העתקת מנה. מכיוון ש- g גם העתקת מנה, W פתוחה, מש"ל.

4. יהי $F \subseteq X$ תת-קבוצה סגורה. אזי F תת-מרחב קומפקטי. אז $f(F)$ גם תת-מרחב קומפקטי. מכיוון ש-Y מרחב האוסדורף, $f(F)$ סגורה. אז הכחנו ש-f סגורה. מכיוון שהיא גם רציפה ועל, היא העתקת מנה (ההרצאה).

5. א' יהי $\rho: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\sim$ העתקת מנה , כלומר $\rho: (x,y) \mapsto [(x,y)]_\sim$ לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
נגדיר $f: \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ כך ש-$f\big((x,y)\big) = \max\{|x|,|y|\}$. מזה ברור ש-$f\big((x,y)\big) = d_{max}((x,y),(0,0))$. הוכחנו כמה פעמים ש- d_{max} - כמו כל מטריקה - פונקציה רציפה , אזי f רציפה . קל לראות גם שהיא על.
לפי הגדרות של f ושל יחס $\sim$ מקבלים:
$$(x,y)\sim(u,v) \Leftrightarrow f\big((x,y)\big) = f((u,v))$$
אזי אם נגדיר $\varphi: \mathbb{R}^2/\sim \to [0,\infty)$
כך ש-$\varphi: [(x,y)] \mapsto f\big((x,y)\big)$, אז φ תהיה חח"ע ועל. ברור גם ש-$f = \varphi \circ \rho$. לפי משפט מההרצאה - φ רציפה כי f רציפה.
נגדיר עכשיו פונקציה $g: [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ כך ש-$g(x) = (x,0)$. קל לבדוק ש-g רציפה.

עכשיו: $\varphi \circ \rho \circ g = Id_{[0,\infty)}$ ולכן $\rho \circ g = \varphi^{-1}$.
אזי גם φ^{-1} רציפה ו חח"ע ועל. לכן φ הומאומורפיזם.
התשובה סופית: $\mathbb{R}^2/\sim \cong [0,\infty)$.

<u>ב'</u> אם בסעיף <u>א'</u> נחליף:
- מרחב $[0,\infty)$ למרחב $\mathbb{R}$,
- ההגדרה $f\big((x,y)\big) = d_{max}((x,y),(0,0))$
  להגדרה $f\big((x,y)\big) = x + y$,
  אז נקבל הוכחה ש- $\mathbb{R}^2/\sim \cong \mathbb{R}$

6. אם U פתוחה ב-X, V פתוחה ב-Y ו- W פתוחה ב- Z, אזי $p(U \times V \times W) = U \times W$ פתוחה ב - $X \times Z$, ו- $p^{-1}(U \times W)$ פתוחה ב-$X \times Y \times Z$. לפי הגדרת טופולוגית המכפלה ולפי כמה משפטים מההרצאות לגבי בסיס, זה מוכיח ש- p פונקציה רציפה ופתוחה. ברור שהיא גם על. מהתנאי המספיק (ההרצאה) נובע ש-p העתקת מנה.