פיתרון לתרגיל מספר 9

תשובה 1:

יהי X_i - התוצאה בדקה ה- i. צריך למצוא חסם עליון להסתברות $P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i \ge 49\right)$ כאשר $X_i \sim U(1,6)$. לכל i : $E(X_i)=\frac{1+6}{2}=3.5$, $V(X_i)=\frac{(6-1+1)^2-1}{12}=\frac{35}{12}$. לכן $E\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right)=12\cdot 3.5=42$. מאחר שההטלות ב"ת ולכולן יש את אותה התפלגות נקבל:

$$V\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right)=12\cdot V(X_1)=12\cdot\frac{12}{35}=35$$

מכאן, לפי אי שיוויון צ'בישב:

$$P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i \ge 49\right)=P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i-42\ge 49-42\right)\le P\left(\left|\sum_{i=1}^{12} X_i-42\right|\ge 49-42\right)\le$$

$$\le\frac{V\left(\sum_{i=1}^{12} X_i\right)}{(49-42)^2}=\frac{35}{(49-42)^2}=\frac{5}{7}$$

מכיון שסכום תוצאות הקוביות הוא סימטרי סביב תוחלתו אז ניתן לחלק את החסם ב 2 ולקבל חסם עליון: $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{14}$.

תשובה 2:

לא. אם $E(X)=4$ ויש סטייה של $9-E[X]=9-4=5$ בסיכוי $\frac{1}{2}$, אז בסיכוי $\frac{1}{2}$ רבוע הסטייה הוא 25. לכן $V(X)=\frac{1}{2}\cdot(9-4)^2+\sum_{x\neq 9}P(X=x)\cdot(x-4)^2\ge\frac{1}{2}\cdot 25=12.5$ ולכן השונות גדולה מ 5 וזאת סתירה.

לפי אי שיוויון צ'בישב (ראו פירוט בתשובה (1)) : $P(|X-E(X)|\ge a)\le\frac{Var(X)}{(a-E(X))^2}$

שאומר כאן ש $P(|X-4|\ge 5)\le\frac{5}{(9-4)^2}=\frac{1}{5}$ לכן לא יתכן שיתקיים $P(X=9)=0.5$.

תשובה 3:

א. ההתפלגות של המשתנה האחיד הבדיד היא :

$$p_X(k)=\begin{cases}\frac{1}{b-a+1} & k=a,a+1,\dots,b\\ 0 & else\end{cases}$$

ולכן הפונקציה היא

$$M(s)=\sum_{k=a}^{b}\frac{1}{b-a+1}e^{sk}=\frac{e^{sa}}{b-a+1}\sum_{k=0}^{b-a}e^{sk}$$
$$=\frac{e^{sa}}{b-a+1}\cdot\frac{1-e^{s(b-a+1)}}{1-e^{s}}$$

ב. באופן אנלוגי, (כמובן באינטגרציה) הפונקציה המתאימה למשתנה האחיד הרציף היא :

$$M(s)=E\left[e^{sX}\right]=\int_a^b\frac{e^{sx}}{b-a}dx=\frac{e^{sb}-e^{sa}}{s(b-a)}$$

תשובה 4:

א. נשים לב שאם $X=1$ (מה שקורה בהסתברות של $\frac{1}{3}$) אזי $U=Y$ ואם $X=0$ (מה שקורה בהסתברות של $\frac{2}{3}$) אזי $U=Z$. לכן

$$M_U(s)=P(X=1)\cdot M_Y(s)+P(X=0)\cdot M_Z(x)=$$

ב. נסמן $V=2Z+3$ אזי

$$M_V(s)=M_{2Z+3}(s)=M_{2Z}(s)+M_3(s)=M_Z(2s)+e^{3s}=$$
$$=e^{3\left(e^{2s}-1\right)}e^{3s}=e^{3\left(e^{2s}+s-1\right)}$$

ג. יהי $W=Y+Z$ אזי

$$M_W(s)=M_{Y+Z}(s)=M_Y(s)M_Z(s)=\frac{2}{2-s}\cdot e^{3(e^{2s}-1)}$$

תשובה 5:

א. דרך א. ידוע שלכל מ"מ X שעבורו קיימת פונקציה יוצרת מומנטים $M_X(0) = 1$ (ראו בחוברת הקורס לאחר משפט מרצבך-שומרון) . אם נציב -0 נראה שרק הפונקציה הראשונה מקיימת זאת.
דרך ב. הגבול של הפונקציה יוצרת המומנטים במינוס אינסוף היא ההסתברות שהמשתנה המקרי מקבל את הערך 0(מדוע?) נחפש את הגבול הזה ב-2 המקרים:

$$\lim_{s\to-\infty}(M(s))=\lim_{s\to-\infty}\left(e^{2\left(e^{e^s-1}-1\right)}\right)=$$

$$\lim_{Y\to0}\left(e^{2\left(e^{Y-1}-1\right)}\right)=e^{2\left(e^{-1}-1\right)}=e^{2\cdot(-0.3678)}=0.282$$

$$\lim_{s\to-\infty}(M(s))=\lim_{s\to-\infty}\left(e^{2\left(e^{e^s}-1\right)}\right)=$$

$$\lim_{Y\to0}\left(e^{2\left(e^0-1\right)}\right)=e^0=1$$

מכאן רואים שהפונקציה השניה נותנת את הגבול 1, ז"א שאם היא היתה פונקציה יוצרת מומנטים ההסתברות של הערך 0 היתה 1. אבל, אם זהו המשתנה המקרי הרי שהפונקציה יוצרת המומנטים שלו היא $e^0 = 1$.

ב. רואים מסעיף (א) שההסתברות היא 0.282.

תשובה 6:

ראשית נמצא את הקבוע c ע"י שימוש ב- $M_X(0) = 1$:

$$1=M_X(0)=c\cdot\frac{3+4+2}{3-1}=\frac{9}{2}$$

$$c=\frac{2}{9}$$

$$E[X]=\frac{d}{ds}M(s)\bigg|_{S=0}=\frac{2}{9}\cdot\frac{\left(8\cdot e^{2s}+6\cdot e^{3s}\right)\left(3-e^s\right)+e^s\left(3+4e^{2s}+2e^{3s}\right)}{\left(3-e^s\right)^2}\Bigg|_{s=0}$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{14\cdot2+9}{4}=\frac{37}{18}$$

המשך לתשובה 6:

כעת נשתמש בזהות:

$$\frac{1}{3-e^s}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-e^s/3}=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{e^s}{3}+\frac{e^{2s}}{9}+\ldots\right)$$

הזהות הזו נכונה כל עוד s קטן מספיק כך ש: $e^s<3$.

ומכאן: $M_X(s)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(3+4e^{2s}+2e^{3s}\right)\left(1+\frac{e^s}{3}+\frac{e^{2s}}{9}+\ldots\right)$

עכשיו נוכל לזהות את המקדמים של e^{0s} ו – e^s ונקבל:

P(X=0) = 2/9
P(X=1) = 2/27

נסמן באות A את המאורע X≠0, ונקבל:

$$P_{X|A}(k)=\begin{cases}\dfrac{p_X(k)}{P(A)} & k\neq 0\\ 0 & else\end{cases}$$

כך ש:

$$E[X\mid X\neq 0]=\sum_{k=1}^{\infty}kp_{X|A}(x)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kp_X(k)}{P(A)}=\frac{E[X]}{1-P(X=0)}$$
$$=\frac{37/18}{7/9}=\frac{37}{14}$$

תשובה 7:

א. לפי משפט הגבול המרכזי:

$$S_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$Z = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

$$\sum_{i=1}^{120} X_i = S_{120} \sim N(120*1.2, 120*0.4^2) = N(144, 19.2)$$

$$P(S_{120} > 140) = P(Z > \frac{140-144}{\sqrt{19.2}}) = P(Z > -0.912) =$$

$$= 1 - P(Z < -0.912) = 1 - [1 - \Theta(0.912)] = \Theta(0.912) = 0.8186$$

ב. לפי משפט הגבול המרכזי:

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{30} X_i}{30} = \bar{X}_{30} \sim N(1.2, \frac{0.4^2}{30})$$

$$P(\bar{X}_{30} > 1.5) = P(Z > \frac{1.5-1.2}{0.4/\sqrt{30}}) = P(Z > 4.1) =$$

$$= 1 - P(Z < 4.1) = 1 - \Theta(4.1) \approx 0$$

לכן הסיכוי שהמדריך צודק הוא אפסי.

ג. נחשב הסתברות של חממה כלשהי להיסגר:

$$P(X_i < 1) = P(X_i < \frac{1-1.2}{0.4}) = P(Z < -0.5) = 1 - \Theta(0.5) = 0.3085$$

נסמן ב W את מספר החממות בהן היבול קטן מ 1 טון (מתוך 120 חממות)

W~Bin(120,0.3085)

נבדוק האם אפשר לבצע קירוב נורמלי לבינומי (כלל - אם $np > 5$ ניתן לקרב)

$np = 120*0.3085 = 37.02 > 5$ לכן ניתן לעשות קירוב . מכאן ש- W מתפלג

בקירוב נורמלית עם הפרמטרים הבאים:

$W \sim N(np, npq) = N(37.02, 25.6)$ לכן

$$P(W \geq 12) = P(Z \geq \frac{12-37.02}{\sqrt{25.6}}) = P(Z \geq -4.945) = 1 - P(Z \leq -4.945) = \Theta(4.945) \approx 1$$

תשובה 8:

א. X – מ"מ המציין את משקל הפיתה

$$X \sim N(100,5^2)$$
$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-100}{5}$$
$$P(95<X<97)=P(\frac{95-100}{5}<Z<\frac{97-100}{5})=P(-1<Z<-\frac{3}{5})=$$
$$=P(Z<-\frac{3}{5})-P(Z<-1)=\left[1-\Theta(\frac{3}{5})\right]-\left[1-\Theta(1)\right]=\Theta(1)-\Theta(\frac{3}{5})=0.8413-0.7257=0.1156$$

ב.
$$P(X<95)=P(Z<\frac{95-100}{5})=P(Z<-1)=\left[1-\Theta(1)\right]=1-\Theta(1)=1-0.8413=0.1587>0.1$$

מסקנה: המאפיה אינה עומדת בתקן

על מנת לעמוד בתקן:

$$P(X<95)=P(Z<\frac{95-100}{\sigma})\le 0.1$$
$$\Theta(-\frac{5}{\sigma})\le 0.1 \Rightarrow 1-\Theta(\frac{5}{\sigma})\le 0.1 \Rightarrow \Theta(\frac{5}{\sigma})\ge 0.9 \Rightarrow \frac{5}{\sigma}\ge 1.29 \Rightarrow \sigma\le 3.876$$

ג. נשתמש במשפט הגבול המרכזי: $S_n \sim N(n\mu,n\sigma^2)$ לכן

$\sum_{i=1}^{30} X_i = S_{30} \sim (30\cdot 100, 30\cdot 5^2)$ נתקנן $Z=\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ ונקבל

$$P(S_{30}<2950)=P(Z<\frac{2950-30\cdot 100}{5\sqrt{30}})=1-\Theta(1.825)=1-0.966=0.034$$

ד. יהי W מ"מ המציין את משקל הפיתה עם החומוס והמלפפון ויהי Y מ"מ המציין את משקל החומוס בתוך הפיתה. אזי $W=20+X+Y$ ו- $Y\sim N(50,3^2)$. לכן

$$E(W)=E(20+X+Y)=20+E(X)+E(Y)=20+100+50=170$$
$$Var(W)=Var(20+X+Y)=Var(X)+Var(Y)=25+9=34$$

ו- $W\sim N(170,34)$.

מכאן ש $\bar{W}=\frac{\sum W_i}{16}\sim N(170,34/16)$. נתקנן ונקבל:

$$P(\bar{W}>171.5)=P(Z>\frac{171-170}{\sqrt{34/16}})=P(Z>1.03)=1-\Theta(1.03)=1-0.8458=0.1515$$

תשובה 9:

א. תוחלת של כל אחד מ—X_j היא $\mu = \frac{-0.5+0.5}{2} = 0$ כאשר השונות היא

$$\sigma^2 = \frac{(0.5-(-0.5))^2}{12} = \frac{1}{12} .$$

על פי משפט הגבול המרכזי,

$$P\left(\sum_{j=1}^{12} X_j > 1\right) = 1 - P\left(\sum_{j=1}^{12} X_j \le 1\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1-12\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}\cdot 12}}\right) = 1-\Phi(1) \approx 0.1587 .$$

ב. חישוב דומה מביא:

$$P\left(\sum_{j=1}^{12} X_j \le 2\right) = \Phi\left(\frac{2-12\cdot 0}{\sqrt{\frac{1}{12}\cdot 12}}\right) = \Phi(2) \approx 0.9772 .$$