מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 5

1. א' $\mathbb{Q}^2$ צפופה ב-$\mathbb{R}^2$

<u>ב'</u> יהי X מ"ט $A, U \subseteq X$ כך ש- A, U צפופות ב-X ו-U פתוחה.

<u>הוכיחו</u> ש-U $A \cap$ צפופה ב- X .

2. יהיו X מרחב טופולוגי ו-M מרחב מטרי.

תהא תת-קבוצה $A \subseteq X$ צפופה ב-X ויהיו $f, g: X \to M$ שתי פונקציות רציפות כך ש- $f|_A = g|_A$.

הוכיחו ש- $f = g$.

3. נתבונן בשני תת-מרחבים $X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$, כאשר:

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y + z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x + y + z = 5\}$$

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 2x + 3y + z = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ 4x + 5y + z = 0\}$$

<u>הוכיחו/הפריכו</u> אם X ו-Y הומאומורפיים.

4. <u>תזכרת</u>

נסמן ב-$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים ממשיים שאיבר ה-n שלה הוא מספר x_n.

תהי l_∞ קבוצה של כל הסדרות הממשיות החסומות, ז"א,

$$l_\infty = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} \middle|\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}$$

<u>נזכיר שהוכח בתרגיל כיתה 4 (בעיה 2)</u> שפונקציה $d: l_\infty \times l_\infty \to [0, \infty)$ כאשר $\{d_\infty((x_n), (y_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$, מהווה מטריקה על l_∞.

יהי בנוסף: X קבוצת הסדרות כך ש-$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{R} | \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$.

<u>הוכיחו:</u>

א) $X \subseteq l_\infty$,
ב) הקבוצה F של הסדרות מסוג $(x_1, x_2, \dots, x_k, 0,0, \dots)$ (ז"א, הסדרות עם מספר סופי של איברים הלא אפסיים) היא תת-קבוצה ב-X.
ג) F צפופה ב-X בטופולוגיה המושרת על ידי המטריקה d.

5. נתבונן ברבוע Q במשור $\mathbb{R}^2$ עם הקודקדים: $(0,0), (0,1), (1,1)(1,0)$.

ז"א:

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, y = 1\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1, 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, y = 0\}$$

הוכיחו ש-Q אינו איזומורפי ל-$\mathbb{R}$, ולשום קטע (פתוח, סגור או חצי סגור) ב-$\mathbb{R}$ ולשום קרן (פתוחה או סגורה מצד אחד) ב-$\mathbb{R}$.

6. יהי $X = \{a, b\}$ ו- (X, τ) מרחב טופולוגי קשיר ולא טריוויאלי. <u>מיצאו</u> כל הטופולוגיות τ המקימות את התנאי הזה.

7. יהי $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$.
א) <u>הוכיחו</u> ש- L *קבוצה קשירה מסילתית*
ב) *יהיו :*
$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < y\};$
$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > y\}$
<u>הוכיחו</u> ש- U, V רכיבי קשירות של המרחב L^c.