

תדו"א 1 89118 תרגיל 8

א. חשב $(x^3 \ln x)^{(50)}$

ב. חשב את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

4. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\sin(2x)}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \sin(x^2)}{x^4}$

6. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x^2-1}}$

7. הראה כי שימוש בכלל לופיטל לא פותר את הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 5 \cos(4x)}{x - \sin x}$ מדוע?

ג. 1. הראה כי למשוואה $x \sin x + \cos x = x^2$ פתרון יחיד ב $[0, \infty)$.

2. הראה כי $x > \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ לכל $x > 0$.

3. הראה כי $\frac{\sin x}{x}$ יורדת ב $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. הסק כי שם $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$.

4. הראה כי לכל $b > a > 0$ מתקיים $\frac{b-a}{1+a^2} < \arctan b - \arctan a < \frac{b-a}{1+b^2}$.

ד. מצא את הנקודה/נקודות c ממשפט לגרנו' עבור:

1. $f(x) = x^2$ ב $[0, 3]$. 2. $f(x) = \frac{1}{x}$ ב $[1, 2]$. 3. $f(x) = x^3$ ב $[-1, 1]$.

4. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ ב $[-3, 3]$.

5. הראה של $f(x) = \frac{1}{x}$ אין נקודת לגרנו' c בכל $[a, b]$ כך ש $a < 0 < b$ מדוע?

ה. נתון $f(0) = 0$ וקיימת $f'_+(0) = 0$. הוכח כי $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{f(x)} = 1$.

ו. חקור באופן מלא את הפונקציות הבאות ושרטט:

1. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

2. $f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x - 7}$

3. $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

$$f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{2}{3}} \quad 4.$$

פתרונות

$$א. \frac{1}{x^{47}} \left[-49! + 150 \cdot 48! - 6 \cdot \binom{50}{2} \cdot 47! + \binom{50}{3} \cdot 6 \cdot 46! \right]$$

ב. 1. $\frac{1}{2}$ 2. 1 3. $e^{-\frac{1}{12}}$ 4. 1 5. $-\frac{1}{3}$ 6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 7. נגזרת המכנה מתאפסת באינסוף נקודות.

7. 1. $c = \frac{3}{2}$ 2. $c = \sqrt{2}$ 3. $c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ 4. $c = \frac{2 \pm \sqrt{27}}{3}$