ערכים עצמיים

(לתת קצת מוטיבציה למה זה חשוב, גם במדמ"ח!)

דוג: נתונה $A=\begin{pmatrix}2&3\\4&1\end{pmatrix}$

מתקיים $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$ ז"א $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

הגדרה: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$
אם קיים $0\neq v\in\mathbb{F}^n$ כך ש- $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$ עבור סקלר $\lambda\in\mathbb{F}$
אז נאמר ש- λ הוא "ערך עצמי" של A
וש- v הוא "וקטור עצמי" של A עבור ע"ע λ.

[ערך עצמי = ע"ע, וקטור עצמי = ו"ע]

♡: $Av=\lambda v$ $v\neq 0$

$\Downarrow$

$(A-\lambda I)v=0 \Leftarrow Av-\lambda v=0$

$|A-\lambda I|=0$ כי יש למטר' $B=A-\lambda I$ פיתרון לא טריוויאלי, שהרי $v\neq 0$.

דוגמה: $A=\begin{pmatrix}-3&1&-1\\-5&3&-1\\-6&6&-4\end{pmatrix}$ מצאו ע"ע ואת ו"ע.

פיתרון: מציאת ע"ע: על מנת למצוא ע"ע קודם רוצים למצוא את ה-λ-ות שמקיימות $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\left|\begin{pmatrix}-3-\lambda&1&-1\\-5&3-\lambda&-1\\-6&6&-4-\lambda\end{pmatrix}\right| \underset{\text{נחשב לפי מינורים לפי שורה ראשונה}}{=} (-3-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda&-1\\6&-4-\lambda\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}-5&-1\\-6&-4-\lambda\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}-5&3-\lambda\\-6&6\end{vmatrix}$$

$$=(-3-\lambda)\Big[\underbrace{(3-\lambda)(-4-\lambda)-(-6)}_{\lambda^2+\lambda-6}\Big]-\Big[-5(-4-\lambda)-6\Big]-\Big[-5\cdot 6-(3-\lambda)\cdot(-6)\Big]$$

$$=-(3+\lambda)(3+\lambda)(\lambda-2)-20-5\lambda+6+30-18+6\lambda$$

$$=-(3+\lambda)^2(\lambda-2)-2+\lambda=(\lambda-2)\left(1-(\lambda+3)^2\right)=(\lambda-2)(\lambda+4)(-\lambda-2)$$

מחפשים λ-ות כך ש- $|A-\lambda I|=0$

$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+4)(-\lambda-2)=0$

⇐ יש 3 ע"ע $\boxed{\lambda_3=-4 \quad \lambda_2=-2\ ,\ \lambda_1=2}$

נמצא ו"ע:

① עבור ע"ע $\lambda_1=2$: נחפש את ה- v שמקיים $(A-\overset{\lambda}{2}I)=0$

$$\begin{pmatrix} -3-2 & 1 & -1 & | & 0 \\ -5 & 3-2 & -1 & | & 0 \\ 6 & 6 & -4-2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{במחברת}} \cdots \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

הפעולות: ① R_2-R_1 ② $R_3 \leftrightarrow R_2$ ③ $\frac{1}{6}R_2$ ④ R_1+5R_2 ⑤ $\frac{1}{4}R_1$ ⑥ $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{cases} z=t \\ y=t \\ x-y-z=t-t=0 \end{cases} \leftarrow$$

עבור ע"ע $\lambda_1=2$ הווקטורים העצמיים הם מהצורה $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}$

והם יוצרים מרחב עצמי של ע"ע $\lambda_1=2$ שהוא $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix}\right\}$

בסיס למרחב זה הוא $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

* עבור ע"ע $\lambda_2=-2$:

$$\begin{pmatrix} -3+2 & 1 & -1 & | & 0 \\ -5 & 3+2 & -1 & | & 0 \\ 6 & 6 & -4+2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{① } R_2-R_3 \text{ ② } R_2+R_1 \text{ ③ } \frac{1}{2}R_3 \text{ ④ } R_3-3R_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$z=0$
$y=t$
$x=t$

ולכן $\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ הווקטורים העצמיים.

$\left\{\begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ מרחב עצמי ובסיס אליו: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

* עבור ע"ע $\lambda_3=-4$:

$$\begin{pmatrix} -3+4 & 1 & -1 & | & 0 \\ -5 & 3+4 & -1 & | & 0 \\ 6 & 6 & -4+4 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{① } R_2-R_3-R_1 \text{ ② } \frac{1}{6}R_3 \text{ ③ } R_3+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$z=t$
$y=\frac{t}{2}$
$x=t-\frac{t}{2}=\frac{t}{2}$

$\Leftarrow \begin{pmatrix} \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} \\ t \end{pmatrix}$ ובסיס למרחב $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\left[\text{או } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ וכו'}\right]$

משפט: תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$

ויהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ע"ע שונים של A

$v_1, \dots, v_m$ ו"ע שמתאימים לע"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ בהתאמה.

אז $\{v_1, \dots, v_m\}$ בת"ל.

צ"א וקטורים עצמיים של ע"ע שונים הם בת"ל.

דוגמה: $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}$

$$|A-\lambda I| = \dots = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

$\lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=4$

נמצא ו"ע: עבור $\lambda_1=1$:

$$(A-\lambda I)v=0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1-1&1&1&0\\0&2-1&1&0\\0&2&3-1&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3-2R_2]{R_1-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c}0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right) \quad \begin{matrix}z=t\\y=-t\\x=s\end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}s\\-t\\t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

לכן בסיס למרחב העצמי של $\lambda_1=1$ הוא $\left\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}\right\}$

תזכורת: אם v_1, v_2 ו"ע של אותו ע"ע λ, אז גם כל צ"ל שלהם יהיה ו"ע של λ כי: נראה: $A(\alpha v_1+\beta v_2)=\lambda(\alpha v_1+\beta v_2)$

$$A(\alpha v_1+\beta v_2)=A\alpha v_1+A\beta v_2=\alpha Av_1+\beta Av_2=\alpha\lambda v_1+\beta\lambda v_2$$
$$=\lambda\alpha v_1+\lambda\beta v_2=\lambda(\alpha v_1+\beta v_2)$$

עבור $\lambda_2=4$: נקבל ... $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ בסיס למרחב העצמי.

ראינו שלפעמים יש וקטור אחד בבסיס ולפעמים 2,

רואים שאולי יש קשר לחזקה בפול' של הדטר' $|A-\lambda I|$

ננסה לברר את הקשר...

הגדרות:

$\lvert A-\lambda I\rvert$ = "הפולינום האופייני" של A ונסמן $P_A(\lambda)$
לכל ע"ע λ_i של A "הריבוי האלגברי" שלו הוא החזקה של הגורם $(\lambda_i-\lambda)$ בפולינום האופייני.
לכל ע"ע λ_i של A "הריבוי (ריבוב) הגיאומטרי" שלו הוא המימד של המרחב העצמי שלו

לדוג: בדוג האחרונה

$$P_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

עבור ע"ע $\lambda_1=1$: הריבוי האלגברי $=2$
הריבוי הגיאומטרי $=2$

עבור ע"ע $\lambda_2=4$: הריבוי האלגברי $=1$
הריבוי הגיאומטרי $=1$

הערה: לא תמיד הריבוי האלג = הריבוי הגיאו אבל בכל זאת יש קשר

משפט: לכל ע"ע: הריבוי האלגברי $\geq$ הריבוי הגיאומטרי ≥ 1