

תרגיל מס' 5 – דטרמיננטות

1. חשבו את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות. עבור ב' וג' חשבו מתי הן הפיכות?

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & n & n & \cdots & n & n \\ n & 2 & n & \cdots & n & n \\ n & n & 3 & \cdots & n & n \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ n & n & & \cdots & n-1 & n \\ n & n & & \cdots & n & n \end{bmatrix}_{n \times n} & \text{ג.} & \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix} & \text{ב.} & \begin{bmatrix} 14 & 27 & 35 \\ 22 & 11 & 19 \\ -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{א.} \end{matrix}$$

2.

3.4 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח בעזרת פיתוח לפי שורה/עמודה:

א. אם יש ב A שורת/עמודת אפסים, אזי $|A|=0$.

ב. אם A משולשית, אזי $|A|=a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$. (בפרט, $|I|=1$).

3.

5.5 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח:

א. לכל k טבעי מתקיים $|A^k|=|A|^k$.

ב. אם A הפיכה, אזי $|A^{-1}|=|A|^{-1}$.

ג. אם A הפיכה, אזי לכל k טבעי מתקיים $|A^{-k}|=|A|^{-k}$.

4. קבעי עבור אילו ערכים של $a \in \mathbb{R}$ יש למע' פתרון יחיד, אינסוף פתרונות

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1 \end{cases} \quad \text{למערכת ועבור אילו ערכים של } a \text{ אין פתרון למערכת:}$$

$$\text{(רמז: } a^3 - 3a + 2 = (a-1)^2(a+2)\text{)}$$

5. הוכיחו את הטענות הבאות:

א. אם $AA^T = 1$ אז $\det(A) = \pm 1$.

ב. אם $A^2 = A$ ו- $A \neq I$ אז $\det(A) = 0$.

ג. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא 0 אז $\det(A) = 0$.

שאלת בונוס :

יהיו $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$. המטריצה $\in \mathbb{F}^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

נקראת מטריצת ונדרמונדה.

7.4 תרגיל. א. חשב את הדטרמיננטה של מטריצת ונדרמונדה הנ"ל.

[הדרכה: א. בצע $C_i \leftarrow C_i - a_1 C_{i-1}$ עבור $i=n, \dots, 2, 1$ אחר כך עבור $i=n-1, n-2, \dots, 2, 1$.

ב. פתח לפי השורה הראשונה, באינדוקציה.

ג. מכך שורה i הוצא את הגורם $[a_i - a_1]$

ד. מתי מטריצת ונדרמונדה הפיכה?

בהצלחה!