פתרון - **תרגיל בית 8** (ליניארית מדמ"ח)

שאלה 1

מצאו את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של המטריצה הממשית הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\-2&-2&2&1\\1&1&-1&0\end{pmatrix}$$

פתרון:

קל לחשב את הפולינום האופייני (לפי ההגדרה): $f_A(x)=x^2(x-1)^2$. אזי הפולינום המינימלי הוא מהצורה $m_A(x)=x^\alpha(x-1)^\beta$ עבור $1\le\alpha,\beta\le 2$. נמצא את החזקות.

נתחיל עם α:

$$rank(A)=rank\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&-1&0&0\\-2&-2&2&1\\1&1&-1&0\end{pmatrix}=3$$

$$rank(A^2)=rank\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\-3&-3&3&2\\2&2&-2&-1\end{pmatrix}=2$$

ולכן $\alpha=2$.

כעת עבור β:

$$rank(A-I)=rank\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&-2&0&0\\-2&-2&1&1\\1&1&-1&-1\end{pmatrix}=3$$

$$rank(A-I)^2=rank\begin{pmatrix}-1&-2&0&0\\2&3&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=2$$

ולכן $\beta=2$.

לסיכום, הפולינום המינימלי הוא: $m_A(x)=x^2(x-1)^2$

<u>שאלה 2</u>

הוכיחו או הפריכו: למטריצות A,A^t יש אותו פולינום מינימאלי.

<u>פתרון:</u>

ראינו שכל מטריצה דומה למשוחלפת שלה. בנוסף, הראיתם שלמטריצות דומות יש אותו פולינום מינימלי וזה מסיים את ההוכחה.

<u>שאלה 3</u>

יהיו $A,B\in F^{n\times n}$ שתי מטריצות. הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f_A(x)=f_B(x)$ אזי $m_A(x)=m_B(x)$
ב. אם $m_A(x)=m_B(x)$ אזי $A\sim B$ (משמע, המטריצות דומות)
ג. אם $m_A(x)=m_B(x)$ אזי $f_A(x)=f_B(x)$

<u>פתרון:</u>

כל הסעיפים הם הפרכה. הנה הדוגמאות הנגדיות:

א. $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. שכן מתקיים $f_A(x)=f_B(x)=(x-2)^3$

אך עם זאת $m_A(x)=x-2\neq(x-2)^2=m_B(x)$

ב. ראינו שלמטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני, ולכן מספיק למצוא דוגמא למטריצות שיש להן אותו פולינום מינימלי אך לא אותו פולינום אופייני. למשל:

$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ ומתקיים

$m_A(x)=m_B(x)=(x-1)(x-2)$ אך המטריצות לא דומות מכיוון שאין להם את אותו פ"א: $f_B(x)=(x-1)^2(x-2)$, $f_A(x)=(x-1)(x-2)^2$

ג. אותו דוגמא נגדית כמו בסעיף הקודם.

<u>שאלה 4</u>

הוכיחו שאם אחת מהמטריצות $A,B\in F^{n\times n}$ הפיכה אזי $m_{AB}(x)=m_{BA}(x)$

<u>פתרון:</u>

יש פתרון בתרגיל הקודם.

<u>שאלה 5</u>

תהי $A\in F^{n\times n}$ מטריצה בעלת הפולינום המינימלי $m_A(x)=(x-1)^2$. יהי $f(x)=x^2+4x+3$ פולינום (לאו דווקא הפולינום האופייני!). הוכיחו שהמטריצה $f(A)$ היא הפיכה.

<u>רמז:</u> השתמשו בנתון $m_A(A)=0$ על מנת לפשט את $f(A)$ וזכרו: מטריצה היא הפיכה רק כאשר הדטרמיננטה שלה אינה אפס.

<u>פתרון:</u>

מתקיים

$$\begin{aligned}f(x)&=x^2+4x+3=(x^2-2x+1)+6x+2=m_A(x)+6x+2\\ f(A)&=m_A(A)+6A+2I=6A+2I\end{aligned}$$

נניח בשלילה ש-$f(A)$ אינה הפיכה. אזי $\det(f(A))=\det(6A+2I)=0$ ומכאן $6^n\det\left(A+\frac{1}{3}I\right)=0$ ולכן $-\frac{1}{3}$ הוא שורש של הפולינום האופייני, בסתירה לנתון.

<u>שאלה 6</u>

שלשו את המטריצה הבאה: $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$

<u>פתרון:</u>

הפולינום האופייני הוא $f_A(x)=(x-2)^2(x-4)$ ולכן הע"ע הם $\lambda_1=2,\lambda_2=4$. הווקטורים העצמיים המתאימים הם: $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(0,0,1)$. נשלים אותם לבסיס באמצעות הווקטור $(0,1,0)$ ונקבל את המטריצה המשלשת $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. ההופכית שלה היא היא עצמה. לכן:

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$