הרצאה 4

תזכורת - S - קבוצה של קבוצות

$$\bigcup_{A\in S} A := \{x \mid \exists A\in S : x\in A\}$$

$$\bigcap_{A\in S} A := \{x \mid \forall A\in S : x\in A\}$$

$$x\notin A^c \iff \neg(x\in A^c) \iff \neg(x\notin A) \iff$$
$$\iff \neg(\neg(x\in A)) = x\in A$$

יחסים

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות כלשהן.
המכפלה הקרטזית:

$$\boxed{A\times B := \{(a,b) \mid a\in A,\ b\in B\}}$$

דוגמאות: * $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$

$(17, \frac{2}{5})$, $\cancel{(\frac{1}{3}, 18)}$

* $A\times\emptyset = \emptyset\times A = \emptyset$

* $\{(\emptyset,a) : a\in A\} = \{\emptyset\}\times A$

האיבר היחיד ב- $\{\emptyset\}$

הגדרה: תהא A קבוצה. נאמר כי R הוא יחס על A אם:

תת-קבוצה של $A\times A$: $\boxed{R \subseteq A \times A}$

$$A\times A = \{(a_1,a_2) \mid a_1,a_2\in A\}$$

דוגמה: מעל הקבוצה $A=\{0,1\}$ ניתן להגדיר יחס:

$$R=\{(0,1),(1,1)\}\subseteq\{0,1\}\times\{0,1\}$$

סימון: אם $(a_1,a_2)\in R$ מסמנים: $\underline{a_1 R a_2}$.

כאן, כן מסמנים: $0R1$, $1R1$

אבל: $\cancel{1R0}$

דוגמה נוספת: $\left(S=\{(0,1),(1,0),(1,1)\} \;:\; 1S0\right)$

דוגמאות:

* מעל הקבוצה $\mathbb{Z}$ נגדיר יחס "$\le$":

$$\le \;:=\; \{(n,m)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid n\le m\}$$

כמו שלמים

$(-2,5)\in\le$ $\qquad (3,2)\notin\le$ $\qquad (2,2)\in\le$

$(1,7)\in\le$ $\qquad (1,-10)\notin\le$

* יחס אחר על $\mathbb{Z}$: "$<$":

$< \; := \{(n,m)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \mid n \lneq m\}$ כמספרים שלמים

הערה: $(2,2) \notin <$

* לכל קבוצה A נגדיר יחס שוויון:

$= \; := \{(a,a) \mid a\in A\}$ ⇐ נסמן R

אז: aRb? בדיוק כאשר $a=b$.

* $A=\{1,2,3\}$

$R=\{(1,2),(3,1),(2,3)\}$

אין "תיאור יפה", ועדיין – זה יחס.

* תהי A קבוצה. נגדיר $\overbrace{\text{יחס}}^{R}$ על $P(A)$:

$$XRY \iff X\subseteq Y$$

יחס ההכלה.

• לכל $Y\subseteq A$: $\emptyset R Y$

• לכל $X\subseteq A$: XRA

(תזכורת: $X\subseteq Y$ אם"ם לכל $x\in X$, מתקיים $x\in Y$)

<u>תכונות של יחסים:</u>

תהי A קבוצה ויהי R יחס על A. נאמר כי:

① R <u>רפלקסיבי</u> (reflexive) אם: $\forall a\in A,\quad aRa$

② R <u>סימטרי</u> (symmetric) אם: $\forall a,b\in A,\quad aRb \Rightarrow bRa$

③ R טרנזיטיבי אם: $\forall a,b,c\in A$:

(5) transitive

$$aRb \wedge bRc \Longrightarrow aRc$$

דוגמאות:

* יחס השוויון: $\{(a,a) \mid a\in A\}$
רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי

* על $\mathbb{Z}$: $R=\{(n,m) \mid n\le m\}$
רפלקסיבי, לא סימטרי, טרנזיטיבי

* על $\mathbb{Z}$: $R=\{(n,m) \mid$ m מתחלק ב-n בלי שארית $\}$
רפלקסיבי, לא סימטרי, טרנזיטיבי

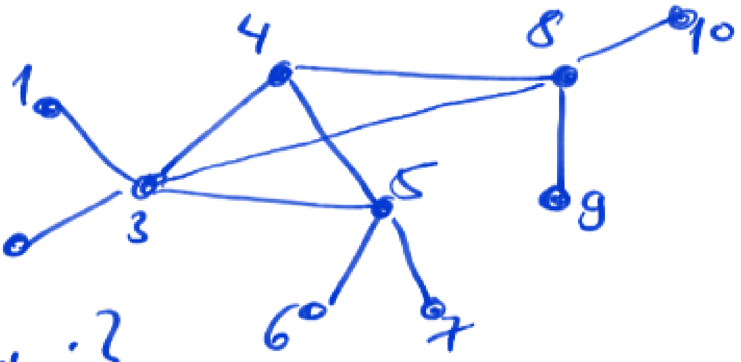
* על $P(A)$: $R=\{(X,Y) \mid X\subseteq Y\}$
רפלקסיבי, לא סימטרי $(A\neq\emptyset)$, טרנזיטיבי

* על $\mathbb{Z}$: $R=\{(n,m) \mid n<m\}$
לא רפלקסיבי, לא סימטרי, טרנזיטיבי

* $A=\{1,2,3\}$:

יחס	רפלקסיבי	סימטרי	טרנזיטיבי
$\{(1,2),(3,2)\}$	−	−	+
$\{(1,2),(3,2),(2,1),(2,3)\}$	−	+	−
$\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ "יחס $A\times A$"	+	+	+

* על קבוצת המשתמשים בפייסבוק, יחס חברות.
לא רפלקסיבי, סימטרי, לא טרנזיטיבי.



$E = \{(i,j) \mid$ i ו- j משתמשים שכנים $\}$

<u>תכונות נוספות:</u>

אהא A קבוצה ו-R יחס על A:

④ <u>R אנטי-סימטרי</u>:

$\forall a,b \in A: \quad aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

⑤ <u>R מלא</u>:

$\forall a,b \in A: \quad aRb \vee bRa$

<u>דוגמאות:</u>

* יחס החלוקה על $\mathbb{Z}$:

$R = \{(n,m) \mid$ m מתחלק ב- n ללא שארית $\}$

לא אנטי-סימטרי, לא מלא

$(3,-3), (-3,3)$

$(2,3) \notin R$
$(3,2) \notin R$

* יחס החלוקה על $\mathbb{N}$: כן אנטי-סימטרי, לא מלא.

* היחס $\leq$ על $\mathbb{Z}$: אנטי-סימטרי, מלא.

* יחס $\subseteq$ על $\underbrace{P(A)}_{\text{קב' החזקה של } A}$: אנטי-סימטרי, לא מלא.

$X \le Y,\ Y \le X \Rightarrow X = Y$

כאשר $|A| \ge 2$:
$A = \{1,2\}$
$\{1\} \nsubseteq \{2\}$
$\{2\} \nsubseteq \{1\}$

* דוגמה:

$$R = \left\{ \begin{matrix} (1,2), (2,1), (1,1), \\ (3,4), (2,2) \end{matrix} \right\}$$

R יחס על $A = \{1,2,3,4\}$

* רפלקסיבי, לא סימטרי, לא אנטי-סימטרי.

<u>הערה</u>: אם יחס R הוא סימטרי וגם אנטי-סימטרי, אזי R הוא יחס השוויון.

<u>הוכחה</u>: נניח כי aRb. מכך ש-R סימטרי: bRa, ומכך ש-R אנטי-סימטרי: $a=b$, לכן R הינו יחס השוויון. מ.ש.ל.

<u>הערה</u>: אם יחס R הוא מלא וגם סימטרי, אזי $R = A \times A$.

<u>הוכחה</u>: כדי להוכיח $R = A \times A$ יש לקחת זוג כלשהו $(a,b) \in A \times A$ ולהראות כי aRb.

יהי $(a,b) \in A \times A$. מכיוון ש-R מלא, מתקיים:

$\underbrace{aRb}$ או $\underbrace{bRa}$

$aRb \Downarrow$ סיימנו.

$bRa \Downarrow$ מכך ש-R סימטרי: aRb

בכל מקרה קיבלנו כי aRb , כנדרש. מ.ש.ל.

יחסי שקילות
(Equivalence relations)

<u>הגדרה:</u> יהא A קבוצה ויהי R יחס על A.
נאמר כי R הינו <u>יחס שקילות</u> (יח"ש) אם:

① R רפלקסיבי.
② R סימטרי.
③ R טרנזיטיבי.

<u>דוגמאות:</u>

* מעל כל קבוצה, יחס השוויון הוא יח"ש.
* מעל $\mathbb{Z}$:

$$R=\{(n,m)\mid n=\pm m\}$$

יח"ש.

$$\left(\begin{array}{l} n=n \\ n=\pm m \Rightarrow m=\pm n \\ n=\pm m,\ m=\pm r \Rightarrow n=\pm r \end{array}\right)$$

* מעל $\mathbb{Z}$: (יהי $n\in\mathbb{N}$)

$$R_n := \{(a,b)\mid a-b \text{ מתחלק ב-}n \text{ ללא שארית}\}$$

$$\left(n \mid a-b\ ,\quad a\equiv b \pmod{n}\right)$$
$$\Updownarrow$$
$$aR_nb$$

<u>R_n הינו יח"ש.</u>
<u>הוכחה:</u>

① <u>רפלקסיבי:</u> יהי $a\in\mathbb{Z}$, אזי $a-a=0$ מתחלק ב-n ללא שארית.
לכן aR_na.

② סימטרי: יהיו $a,b\in\mathbb{Z}$ צ"ל: אם aR_nb אז bR_na.

נניח aR_nb, אזי $a-b$ מתחלק ב-n ללא שארית:

$$\exists q\in\mathbb{Z}:\quad a-b=q\cdot n$$

אבל אז:

$$b-a=(-q)\cdot n$$

ולכן $b-a$ מתחלק ב-n ללא שארית, כלומר bR_na.

③ טרנזיטיבי: יהיו $a,b,c\in\mathbb{Z}$ צ"ל:

$$aR_nb,\ bR_nc \overset{?}{\Longrightarrow} aR_nc$$

נניח aR_nb ו-bR_nc.

$a-b$ מתחלק ב-n ללא שארית:

$$\exists q_1\in\mathbb{Z}:\quad a-b=q_1\cdot n$$

$b-c$ מתחלק ב-n ללא שארית:

$$\exists q_2\in\mathbb{Z}:\quad b-c=q_2\cdot n$$

נסכום את שתי המשוואות:

$$a-c=(q_1+q_2)\cdot n$$

לכן $a-c$ מתחלק ב-n ללא שארית, כלומר aR_nc.
מ.ש.ל.

דוגמה:

תהא A קבוצת הפסוקים (ביקום נתון).
נגדיר יחס R:

$$\varphi R\psi \iff \varphi\leftrightarrow\psi \text{ טאוטולוגיה}$$

R ש"ק:

① רפלקסיבי: $\varphi \leftrightarrow \varphi$ טאוטולוגיה.

② סימטרי: $\varphi \leftrightarrow \psi$ טאוטולוגיה אזי $\psi \leftrightarrow \varphi$ טאוטולוגיה.

③ טרנזיטיבי: $\varphi \leftrightarrow \psi$ ט' ו- $\psi \leftrightarrow \rho$ ט' $\Leftarrow$ $\varphi \leftrightarrow \rho$ ט'.

<u>הגדרה:</u> תהא A קבוצה ויהי R יחס על A. ויהי $a \in A$. נגדיר את <u>מחלקת השקילות של a</u> <u>ביחס ל-R</u> (מחלקה):

$$[a]_R := \{x \in A \mid xRa\}$$

(הערה: $[a]_R = \{x \in A \mid aRx\}$
כי R יחס ולכן סימטרי.)

<u>דוגמאות:</u>

* יחס השוויון (על קבוצה A):

$$[a]_R = \{x \in A \mid xRa\} = \{a\}$$

* על $\mathbb{Z}$: $R = \{(n,m) \mid n = \pm m\}$

$$[12]_R = \{12, -12\}$$
$$[3]_R = \{3, -3\}$$

* על $\mathbb{Z}$: $R_n = \{(a,b) \mid a-b$ מתחלק ב-n ללא שארית$\}$

(מסמנים גם: $a \equiv b \pmod{n}$)

איך נראות מחלקות השקילות של R_n?

$$\boxed{[a]_{R_n} = \{x\in\mathbb{Z} \mid x-a \text{ מתחלק ב-}n\text{ ללא שארית}\} \overset{(*)}{=} \{a+q\cdot n \mid q\in\mathbb{Z}\}} =$$

$$= \{a,\ a\pm n,\ a\pm 2n,\ a\pm 3n,\ \dots\}$$

$(*)$: $(\subseteq)$ יהי x בקבוצה שמאל, $x-a$ מתחלק ב-n ללא שארית. לכן:

$$\exists q\in\mathbb{Z}:\quad x-a = qn$$
$$\Rightarrow x = a+qn$$

לכן x בקבוצה ימין.

$(\supseteq)$ יהי x בקבוצה ימין, אז $x = a+qn$ לאיזשהו $q\in\mathbb{Z}$. אבל אז:

$$x-a = qn$$

מתחלק ב-n ללא שארית, לכן x בקבוצה שמאל.

לדוגמא:

$$[2]_{R_3} = \{\dots,-7,-4,-1,2,5,8,11,14,17,\dots\}$$

$$[n]_{R_n} = \{\dots,-2n,-n,0,n,2n,3n,\dots\}$$

11^{00}

<u>טענה</u>: יהי R יח' שק' מעל A. אזי, לכל $a,b\in A$:

$$[a]_R = [b]_R \iff aRb$$

הוכחה:

$(\Longrightarrow)$: נניח כי $[a]_R=[b]_R$ ונראה aRb.

R שק׳ לכן רפלקסיבי, לכן $a\in[a]_R$ (כי aRa).
אבל $[a]_R=[b]_R$ ולכן: $a\in[b]_R$ כלומר: aRb.

$(\Longleftarrow)$: נניח aRb ונוכיח $[a]_R=[b]_R$, בעזרת הכלה דו״צ.

$(\subseteq)$ יהי $x\in[a]_R$, אזי xRa. וגם aRb
לכן מטרנזיטיביות R: xRb, כלומר $x\in[b]_R$.

$(\supseteq)$ יהי $x\in[b]_R$, אזי xRb.
וגם aRb לכן מסימ׳ של R: bRa,
וכעת מטרנז׳ R: xRa, כלומר $x\in[a]_R$.

מ.ש.ל.

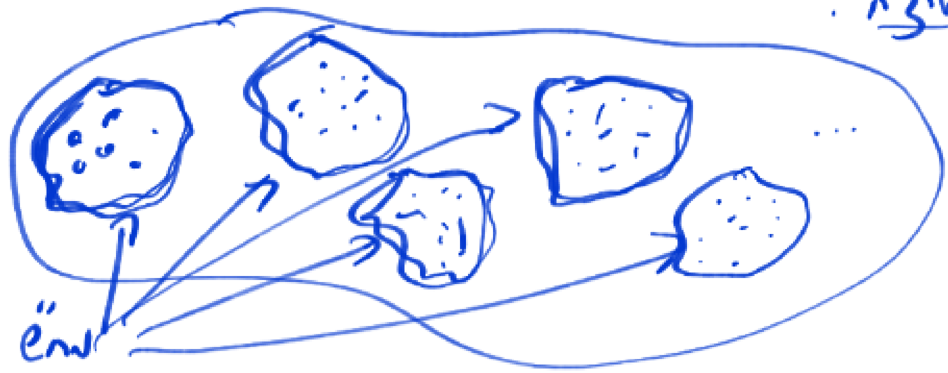
משפט (״יחס שקילות מחלק״):
יהי R יחס שק׳ על קב׳ A.
(1) לכל $a,b\in A$ מתקיים:
$[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$ או $[a]_R=[b]_R$

(2) $A=\bigcup_{[a]_R \text{ שונים}}[a]_R$ $\left(A=\bigcup_{[a]_R\in A/R}[a]_R\right)$.

הגדרה: קבוצת המנה של A ביחס ל-R:
סימון
$A/R := \{[a]_R \mid a\in A\}$

המנה: $A/R := \{[a]_R \mid a\in A\}$

"אילוסטרציה":

$\rightarrow A=$ 

הוכחת המשפט:

(1) נניח R יח״ש על A ויהיו $a,b\in A$.

מקרה 1: aRb. לפי הטענה הקודמת, $[a]_R=[b]_R$.

מקרה 2: $\cancel{aRb}$. נוכיח כי $[a]_R\cap[b]_R=\emptyset$.

בשלילה, נניח כי $x\in[a]_R\cap[b]_R$

אזי $\underbrace{xRb}$ וגם $xRa \overset{\text{סימ׳}}{\Rightarrow} \underbrace{aRx}$

טרנז׳ R: bRa (ולכן aRb, סתירה להנחת המקרה).

(2) צ״ל: $A=\bigcup_{[a]_R\in A/R}[a]_R$.

($\supseteq$): ברור, כי לכל $[a]_R\subseteq A$.

($\subseteq$): יהי $x\in A$, אזי (רפלקסיביות R): $x\in[x]_R$,

ולכן:

$x\in\bigcup [a]_R$.

$[a]_R \in A/R$

מ.ש.ל.

דוגמאות:

* יחס השוויון על קב' A:

$$[a]_R = \{a\}$$

$$A/R = \{\{a\} \mid a \in A\}$$

* $R = A \times A$:

$$[a]_R = \{b \in A \mid bRa\} =$$
$$= \{b \in A \mid (b,a) \in R\} = \{b \in A \mid (b,a) \in A \times A\} =$$
$$= A$$

יש לקב' המנה (המקרה הגרוע) איבר אחד - A:

$$A/R = \{A\}$$

* על $\mathbb{Z}$, $R = \{(m,n) \mid m = \pm n\}$

$$[n]_R = \{\pm n\}$$

$$\mathbb{Z}/R = \{[n]_R \mid n \in \{0,1,2,\dots\}\}$$

* על $\mathbb{Z}$, $R_n = \{(a,b) \mid a-b$ מתחלק ב-n ללא שארית$\}$.

$$[a]_{R_n} = \{a + qn \mid q \in \mathbb{Z}\}$$

$$\mathbb{Z}/R_n = \{[0]_{R_n}, [1]_{R_n}, \dots, [n-1]_{R_n}\}$$

הוכחה - אם $i \neq j$, $0 \le i,j \le n-1$

ברור כי $i \not R_n j$

$i-j$ לא מתחלק ב-n !
לא שארית.

מצד שני, נראה כי אלה הן <u>כל</u> מחלקות השקילות:

יהי $m \in \mathbb{Z}$, נחלק אותו ב-n עם שארית:

$$m = q \cdot n + r$$

$$0 \le r \le n-1$$

בפרט, $m \in [r]_{R_n}$.

* <u>הגדרת הרציונליים דרך קבוצת מנה.</u>

<u>רעיון 1</u>: $\mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longleftrightarrow \frac{a}{b} \quad \left(\frac{-17}{8} =\right)$

$$\underset{a}{(-17}, \underset{b}{8)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 5/6 \longleftrightarrow (5,6) \\ \| \\ 10/12 \longleftrightarrow (10,12) \end{array}\right]$$

<u>רעיון 2</u>: על הקב' $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ נגדיר יחס:

$$(a,b) \, R \, (c,d) \iff ad = bc \quad \left(\iff \frac{a}{b} = \frac{d}{c}\right)$$

<u>הערה</u>: צריך להראות כי R אכן יחס ש"!

נגדיר: $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / R$.

כלומר, $\mathbb{Q} = \{ [(a,b)]_R \mid (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \}$

$\mathbb{Q} = \{[\ldots]_R \mid \ldots\}$

כיצד נפתרה הבעיה?

$$(5,6) \neq (10,12)$$

סוכל שמ"ש:

$$[(5,6)]_R = [(10,12)]_R .$$

כלומר, מספר רציונלי הינו שמ"ש של זוג (a,b)
$a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{N}$.

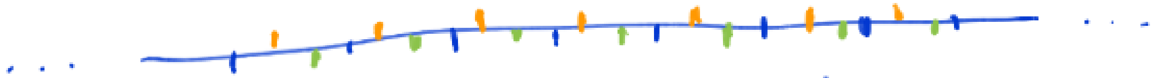
<u>הגדרה מדויקת:</u>

$$.R \subseteq \underbrace{(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})}_{A} \times \underbrace{(\mathbb{Z}\times\mathbb{N})}_{A}$$

* על $\mathbb{R}$ נגדיר יח"ש:

$$xRy \iff x-y\in\mathbb{Z}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{יח"ש:} \quad xRx:\ x-x=0\in\mathbb{Z} \\ xRy \Rightarrow x-y\in\mathbb{Z} \Rightarrow y-x\in\mathbb{Z} \Rightarrow yRx \\ xRy,\ yRz \Rightarrow x-y\in\mathbb{Z},\ y-z\in\mathbb{Z} \Rightarrow x-z\in\mathbb{Z} \Rightarrow xRz \end{array}\right)$$



<u>טענה:</u>

$$.\ \mathbb{R}/R = \{[x]_R \mid 0\le x<1\}$$

$$\left([1.3]_R = \{\ldots,-1.7,-0.7,0.3,1.3,2.3,3.3,4.3,\ldots\}\right)$$

הוכחה:

① נוכיח כי אם $x \neq y$, $0 \le x,y < 1$

מתקיים: $[x]_R \neq [y]_R$.

מדוע?

נניח $[x]_R = [y]_R$, כלומר xRy, כלומר $x-y \in \mathbb{Z}$, אבל $0 \le x < 1$, $0 \le y < 1$

אז: $-1 < x-y < 1$

בנוסף $x-y \neq 0$ (כי $x \neq y$) $\Leftarrow$ $x-y \notin \mathbb{Z}$.

② צריך להראות שאכן: $\mathbb{R}/R = \{[x]_R \mid 0 \le x < 1\}$

תהא $[r]_R$ מח' ב- $\mathbb{R}/R$, צריך להראות:

$$[r]_R = [x]_R$$

לאיזשהו $0 \le x < 1$.

ניקח:

$$x := r - \lfloor r \rfloor$$

המספר השלם הגדול ביותר שקטן או שווה מ- r

מתקיים: $0 \le x < 1$.

ברור כי $r - \lfloor r \rfloor = x \ge 0$ (לפי הגדרה $\lfloor r \rfloor \le r$)

$x < 1$: אחרת, $x \ge 1$ אז:

$$1 \le x = r - \lfloor r \rfloor$$

נכון: $r \geq \lfloor r \rfloor + 1$

כלומר מצאנו שלם $\lfloor r \rfloor + 1$ שקטן או שווה מ-r אך גדול ממש מ-$\lfloor r \rfloor$, בסתירה למקסימליות $\lfloor r \rfloor$.

נסכם: לכל $r \in \mathbb{R}$ מצאנו $0 \leq x < 1$ כך ש-$[r]_R = [x]_R$.

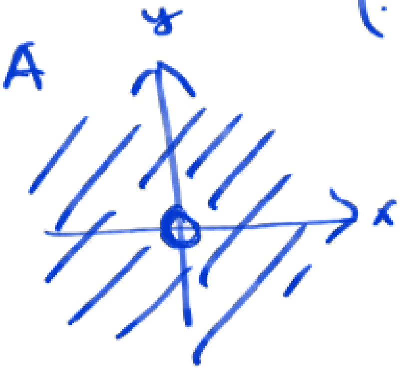
לכן $\mathbb{R}/R = \{ [x]_R \mid 0 \leq x < 1 \}$.

<u>הערה:</u> ניתן לבחור גם נציגים אחרים:

$$\mathbb{R}/R = \{ [x]_R \mid 0 < x \leq 1 \}$$

$$\mathbb{R}/R = \{ [x]_R \mid 0 \leq x < \tfrac{1}{2} \text{ או } 1\tfrac{1}{2} \leq x < 2 \}$$

(תרגיל: בדקו שהשוויונים הנ"ל אכן נכונים.)



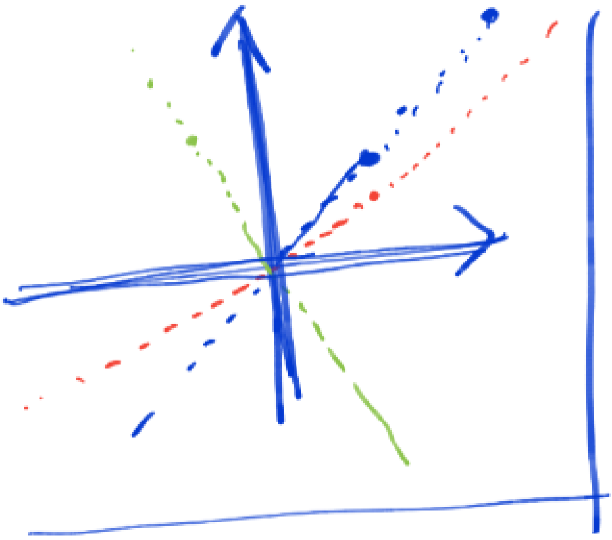
דוגמה 4: $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

נגדיר יחס על A:

$$\left(R \subseteq (\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}) \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}) \right)$$

$$(x_1,y_1) R (x_2,y_2) \iff x_1 y_2 = x_2 y_1$$



$$[(x_1,y_1)]_R =$$
$$= \{(x_2,y_2) \mid x_1 y_2 = x_2 y_1\}$$

אם $x_1 \neq 0$ אז:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

(אם $x_2 = 0$ אז $x_1 y_2 = 0$ ולכן $y_2 \neq 0$ כי $(0,0) \notin A$

אבל $x_1 \neq 0$, סתירה.)

$$\frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_2 - 0}{x_2 - 0}$$

כלומר שיפוע של הישר המחבר לראשית זהים.

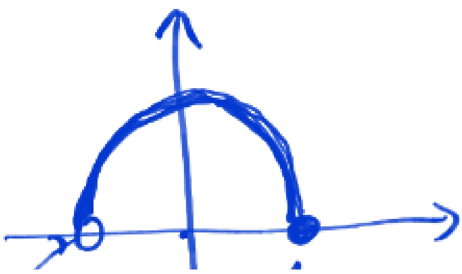
אם $x_1 = 0$: $x_2 y_1 = 0$ ולכן אז $y_1 \neq 0$ כי $(0,0) \notin A$

ולכן $x_2 = 0$, כלומר שתי הנק' נמצאות על ציר ה-y.

הוכחנו ש-

$$[(x_1,y_1)]_R = \{\text{הישר המחבר ל-}(0,0)\text{ ו-}(x_1,y_1)\} =$$
$$= \{(\lambda x_1, \lambda y_1) \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$$

נתאר את קב' המנה. נוכל:



-1 | 1

$(-1,0)$ לא קיבל הנציג!

$$A/R = \left\{ [(x,y)]_R \;\middle|\; \begin{matrix} x^2+y^2=1 \\ y>0 \text{ :וגם} \\ (x=1 \text{ וגם } y=0) \text{ או} \end{matrix} \right\}$$

① <u>המחלקות שונות זו מזו:</u>

נניח בשלילה כי $(x_1,y_1) \, R \, (x_2,y_2)$
כך ששני הנציגים על החלק העליון של מעגל היחידה.

$$\boxed{x_1 y_2 = x_2 y_1}$$

(1) <u>$y_2=0$</u> $\Rightarrow y_1 = 0 \Rightarrow x_1 \in \{\pm 1\}, \; x_2 \in \{\pm 1\}$

כי $x_1 \neq 0$, $A \not\ni (0,0)$; $x_1^2+y_1^2=1$, $x_1^2=1$; כי $x_2^2+y_2^2=1$, $x_2^2=1$

כלומר: $x_1 = x_2 = 1 \Rightarrow (x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.

(2) <u>$y_2 \neq 0$</u> $\Rightarrow y_1 \neq 0 \Rightarrow \dfrac{x_1}{y_1} \overset{(*)}{=} \dfrac{x_2}{y_2} \xRightarrow{\text{מעגל היחידה}}$

$$\Rightarrow \frac{1-y_1^2}{y_1^2} = \frac{1-y_2^2}{y_2^2} \Rightarrow \frac{1}{y_1^2} = \frac{1}{y_2^2} \Rightarrow y_1 = \pm y_2$$

אבל מכיוון שלקחנו את החלק העליון של מעגל היחידה, $y_1=y_2$.

אבל אז $x_1=x_2$, לפי (*). קיבלנו שאלה הנציג אותו.

כלומר, הראינו כי אין שני נציגים לאותה מחלקה.

② [illegible]

(2 נמצא מערכת נציגים:

תהי $(x,y) \in A$.
$(= \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

אם $y>0$:

$$(x,y)\, R \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

נקודה זו נמצאת בחצי העליון.

אם $y<0$:

$$(x,y)\, R \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

נקודה זו נמצאת בחצי העליון.

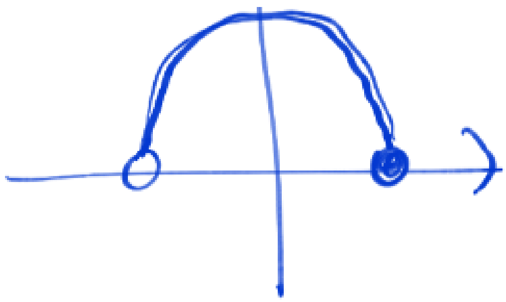
אם $y=0$:

$$(x,y) = (x,0)\, R\, (1,0)$$

נקודה זו נמצאת בחצי העליון.

לסיכום,

$$A/R = \left\{ [(x,y)]_R \;\middle|\; \begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ \text{וגם:} \\ y>0 \text{ או } (y=0,\ x=1) \end{array} \right\}$$



יש עוד קז נציצים רבים אחרים: