פתרון מועד ב' 2009

1. (א) הלגראנג'יאן נתון ע"י $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}k_c(x_1 - x_2)^2$
ומשוואות התנועה הן:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_c(x_1 - x_2) \quad (1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 + k_c(x_1 - x_2) \quad (2)$$

(ב) ובצורה מטריציונית $\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 - \omega_c^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & -\omega^2 - \omega_c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ עם
ערכים עצמיים $\lambda_1 = -\omega^2, \ \lambda_2 = -\omega^2 - 2\omega_c^2$ $(\omega^2 = k/m, \ \omega_c^2 = k_c/m)$

(ג) נקבל שני וקטורים עצמיים $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ופתרון כללי
מהצורה $\mathbf{x} = c_1(t)\mathbf{v_1} + c_2(t)\mathbf{v_2}$ כאשר המקדמים מקיימים
$\ddot{c}_1 = \lambda_1 c_1, \ \ddot{c}_2 = \lambda_2 c_2$, ולכן

$$c_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) \quad (3)$$

$$c_2 = A_2 \cos(\sqrt{\omega^2 + 2\omega_c^2} t + \phi_2) \quad (4)$$

(ד) פתרון משוואות 1,2 עם תנאי ההתחלה
$x_1(0) = \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0, \ x_2(0) = a$ הוא

$$x_1 = \frac{a}{2}\cos(\omega t) - \frac{a}{2}\cos(\sqrt{\omega^2 + 2\omega_c^2} t) \quad (5)$$

$$x_2 = \frac{a}{2}\cos(\omega t) + \frac{a}{2}\cos(\sqrt{\omega^2 + 2\omega_c^2} t) \quad (6)$$

2. (א) הלגראנג'יאן נתון ע"י $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}_2^2 - \frac{1}{2}k(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2})^2$

(ב) לאחר מעבר לקואורדינטות $\mathbf{r} = \mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}, \ \mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{x_1} + \mathbf{x_2})$ נקבל
$\mathcal{L} = m\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{4}m\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2}k\mathbf{r}^2$ וע"י שמוש בקואורדינטות פולריות (במערכת מרכז המסה) נקבל
$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = m\dot{R}^2 + \frac{1}{4}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2$ כאשר $\mathcal{L}_1 = m\dot{R}^2$
מתאר את תנועת מרכז המסה ו $\mathcal{L}_2 = \frac{1}{4}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2$ את תנועת המסות במרכז המסה

(ג) הקואורדינטות הציקליות הן R,θ ולכן התנע של מרכז המסה והתנע הזויתי סביב מרכז המסה נשמרים.

(ד) נסמן $m\dot{R}=P,\ J=mr^2\dot{\theta}$ ונקבל $\mathcal{L}(r,\dot{r})=P^2/m+\frac{1}{4}m\dot{r}^2+J^2/4mr^2-\frac{1}{2}kr^2$. משוואת התנועה עבור r היא $\ddot{r}+2\omega^2r+J^2/m^2r^3=0$ כאשר $\omega^2=k/m$

3. (א) $L_+=L_x+iL_y,\ L_-=L_x-iL_y$ ולכן
$$L_+^\dagger=(L_x+iL_y)^\dagger=L_x^\dagger-iL_y^\dagger=L_x-iL_y=L_-$$

(ב) $[L_+L_-]=(L_x+iL_y)(L_x-iL_y)-(L_x-iL_y)(L_x+iL_y)=L_x^2-iL_xL_y+iL_yL_x+L_y^2-L_x^2-iL_xL_y+iL_yL_x-L_y^2=-2i[L_x,L_y]=2L_z$

(ג)
$$\|L_+|l,m\rangle\|^2=\langle L_+l,m|L_+l,m\rangle=\langle l,m|L_+^\dagger L_+|l,m\rangle=$$
$$\langle l,m|L_-L_+|l,m\rangle=\langle l,m|L^2-L_z^2-L_z|l,m\rangle=$$
$$(l^2+l-m^2-m)\langle l,m|l,m\rangle=l(l+1)-m(m+1)=|c_{l,m}|^2$$

(ד) בהנחה שהמקדמים $c_{l,m}$ ממשיים וחיוביים
$$L_+|l,m\rangle=c_{l,m}|l,m+1\rangle=\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}|l,m+1\rangle$$

4. (א) מאחר ופונקצית הגל (ולכן צפיפות ההסתברות) סימטרית נקבל $P(X<0)=1/2$

(ב) צפיפות ההסתברות היא $f(x)=|\psi(x)|^2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ ונקבל $f(1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$

(ג) נרשום את המצב $|\psi\rangle$ בהצגת התנע $\psi(p)=\langle p|\psi\rangle=\int dx\langle p|x\rangle\langle x|\psi\rangle$ כאשר
$$\langle p|x\rangle=\langle x|p\rangle^*=\left(\int\delta(x-x')\frac{e^{ipx'}}{\sqrt{2\pi}}dx'\right)^*=\left(\frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi}}\right)^*=\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}}$$
ו $\langle x|\psi\rangle=\int\delta(x-x')\psi(x')dx'$. נקבל
$$\psi(p)=\int dx\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}}\int dx'\delta(x-x')\psi(x')dx'=$$
$\int\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}}\psi(x)dx=\int dx\frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt[4]{2\pi}}\propto e^{-p^2}$ וצפיפות ההסתברות היא $f(p)=A|\psi(p)|^2=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2p^2}$ כאשר A קבוע נרמול.

5. מיקום הפגז ברגע הפגיעה בקרקע t ללא תיקון קוריוליס הוא

$$x=v_{0x}t \qquad (7)$$

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \tag{8}$$

ולכן $v_{0y} = \frac{1}{2}gt$. מיקום הפגז ברגע הפגיעה בקרקע t' כאשר מביאים בחשבון את תיקון קוריוליס הוא

$$x' = v_{0x}t' \tag{9}$$

$$y' = v_{0y}t' - \frac{1}{2}(g \pm a_{cor})t'^2 = \frac{1}{2}gtt' - \frac{1}{2}(g \pm a_{cor})t'^2 = 0. \tag{10}$$

נחלץ את t' ממשוואה (10) ונקבל סטייה
$\Delta = x' - x = v_{0x}(t' - t) = v_{0x}t\left(\frac{g}{g \pm a_{cor}} - 1\right) = \mp v_{0x}t\frac{a_{cor}}{g \pm a_{cor}}$.
תאוצת קוריוליס היא $\mathbf{a}_{cor} = -2\omega \times \mathbf{v}$
וגדלה $a_{cor} = 2 \times \frac{2\pi}{86400} \times 800 \simeq 0.12m/s^2$. לכן אם הפגז נורה מזרחה נקבל סטייה של 240 מטר מזרחה (יפגע "רחוק" יותר), ואם נורה מערבה נקבל סטייה של 235 מטר מזרחה (יפגע "קרוב" יותר) ($t = 20000/800s,\ v_{0x} = 800m/s$).