מבחן בקורס הכנה למתמטיקה לקראת שנת תשפ"ג

מרצה: ד"ר ארז שיינר. תאריך: 19/10/22

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=

<u>שאלה 1:</u> נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ x^2 & -1\le x\le 0 \\ x+2 & x<-1 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f\big(f(x)\big)\ge 0$

מקרה ראשון $x>0$

$$f(x)=x$$

$$f\big(f(x)\big)=f(x)=x$$

ולכן אי השיוויון נראה כך

$$x\ge 0$$

וזה נכון תמיד במקרה זה.

מקרה שני $-1\le x\le 0$

$$f(x)=x^2$$

$$f\big(f(x)\big)=f(x^2)$$

כיוון ש $x^2\ge 0$ אזי

$$f(x^2)=x^2$$

ולכן אי השיוויון נראה כך

$$x^2\ge 0$$

וזה כמובן נכון בכל התחום.

סיכום ביניים: עד כה אי השיוויון מתקיים לכל $x\ge -1$ ולא בדקנו את שאר התחומים עדיין.

מקרה שלישי $x<-1$

$$f(x)=x+2$$

$$f\big(f(x)\big)=f(x+2)$$

מתי $x+2>0$? כאשר $x>-2$

לכן בעצם נפרק לתת מקרה 3א $-1>x>-2$

במקרה זה

$$f\big(f(x)\big) = f(x+2) = x+2$$

ולכן אי השיוויון נראה כך:

$$x+2 \geq 0$$

וזה נכון בכל התחום כי $x+2>0$.

כעת נעבור לתת תחום הבא, בו $-1 \leq x+2 \leq 0$

נוריד 2 מכל האגפים ונראה שהתחום 3ב הוא בעצם התחום $-3 \leq x \leq -2$

בתחום זה אי השיוויון נראה כך:

$$f\big(f(x)\big) \geq 0$$

$$f(x+2) \geq 0$$

$$(x+2)^2 \geq 0$$

מתקיים בכל התחום.

לבסוף תחום 3ג' התחום בו $x < -3$

בתחום זה אי השיוויון נראה כך:

$$f\big(f(x)\big) \geq 0$$

$$f(x+2) \geq 0$$

$$(x+2)+2 \geq 0$$

$$x \geq -4$$

כלומר בתחום זה אי השיוויון מתקיים עבור $x \geq -4$ ולא מתקיים עבור $x < -4$

סיכום סופי: אי השיוויון מתקיים אם ורק אם $x \geq -4$.

<u>שאלה 2:</u> מצאו את כל הפתרונות המרוכבים למשוואה $(1+i)z^4 = 1+i$

נחלק ב$1+i$ ונקבל את המשוואה השקולה

$$z^4 = 1$$

$$z^4 = cis(0)$$

נקבל 4 פתרונות שונים

$$z_k = cis\left(\frac{2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3$$

שאלה 3:

א. מצאו את ההיטל של הוקטור $(3,1,-1)$ על הישר בכיוון הוקטור $(1,0,1)$.

ב. מצאו את ההיטל של הוקטור $(3a,a^2,a)$ על הישר בכיוון הוקטור $(1,0,1)$, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר a.

(זכרו: ההפרש בין הוקטור להיטל - מאונך לישר.)

נעזר בתזכורת על מנת לחשב מחדש את הנוסחא של היטל

מה ההיטל של הוקטור v על הישר הנפרש מהוקטור w?

נסמן את ההיטל בaw ונדרוש כי

$$(v-aw)\cdot w=0$$

$$v\cdot w=aw\cdot w$$

$$a=\frac{v\cdot w}{w\cdot w}$$

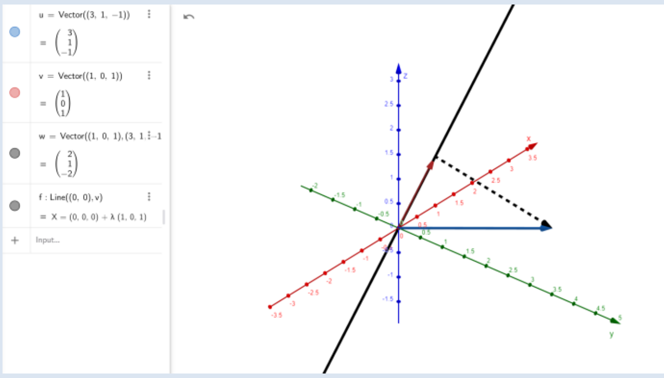
סה"כ ההיטל הוא

$$aw=\frac{v\cdot w}{w\cdot w}\cdot w$$

ניגש כעת לסעיף א':

ההיטל הוא סה"כ

$$\frac{(3,1,-1)\cdot(1,0,1)}{(1,0,1)\cdot(1,0,1)}\cdot(1,0,1)=\frac{2}{2}\cdot(1,0,1)=(1,0,1)$$



כעת נעבור לסעיף ב':

$$\frac{(3a,a^2,a)\cdot(1,0,1)}{(1,0,1)\cdot(1,0,1)}\cdot(1,0,1)=\frac{4a}{2}(1,0,1)=2a(1,0,1)=(2a,0,2a)$$

שאלה 4:

א. הוכיחו את הטענה הבאה באינדוקציה: לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\geq\sqrt{n}$$

ב. מצאו n עבורו

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq 10$$

סעיף א':

בדיקה: עבור $n=1$ אכן:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}\geq\sqrt{1}$$

יהי n עבורו הטענה מתקיימת, כלומר נתון כי

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

צ"ל את הטענה ה$n+1$ כלומר צריך להוכיח כי

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n+1}$$

נתחיל מצד שמאל באי השיוויון שצריך להוכיח:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{\text{הנחה}}{\geq} \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \overset{?}{\geq} \sqrt{n+1}$$

נבדוק את מעבר אי השיוויון האחרון בשורה לעיל, כלומר הימני ביותר:

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

נכפול את שני הצדדים בביטוי החיובי $\sqrt{n+1}$ וצריך להוכיח

$$\sqrt{n(n+1)} + 1 \geq n+1$$

צ"ל כי

$$\sqrt{n(n+1)} \geq n$$

נעלה בריבוע (כי שני הצדדים אי שליליים)

$$n(n+1) \geq n^2$$
$$n^2 + n \geq n^2$$
$$n \geq 0$$

אכן מתקיים! (וכיוון שכל המעברים שקולים, גם אי השיוויון המקורי מתקיים).

סעיף ב': קל לראות שעבור $n = 100$, בזכות סעיף א',

$$\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{100} = 10$$

וזה בדיוק מה שהתבקשנו למצוא.

<u>שאלה 5:</u> יהי $0 \neq a \in \mathbb{R}$, פתרו את האינטגרל

$$\int x \cdot \sin(ax)\, dx$$

$$\int x\sin(ax)\,dx = \begin{Bmatrix} f' = \sin(ax) & g = x \\ f = -\dfrac{\cos(ax)}{a} & g' = 1 \end{Bmatrix} = -\frac{x}{a}\cos(ax) + \frac{1}{a}\int \cos(ax)\,dx =$$
$$= -\frac{x}{a}\cos(ax) + \frac{1}{a^2}\sin(ax) + C$$

<u>שאלה 6:</u>

<u>הגדרה:</u> תהי X קבוצת קבוצות של מספרים טבעיים. X נקראת <u>מפרידה</u> אם

$$\forall A \in X \exists B \in X: A \cap B = \emptyset$$

א. נסחו תנאי השקול לכך ש X אינה מפרידה.

ב. קבעו **והוכיחו** לכל אחת מן הקבוצות הבאות אם היא מפרידה:

$X = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,4\}\}$ $\quad$ $Y = \{\{n+1,n+2\} | n \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $Z = \{\{1,2,\dots,n\} | n \in \mathbb{N}\}$

סעיף א':

X אינה מפרידה אם ורק אם קיימת $A \in X$ כך שלכל $B \in X$ מתקיים כי $A \cap B \neq \emptyset$

סעיף ב': X אינה מפרידה! נבחר $A = \{1,2\}$ ואכן לכל $B \in X$ מתקיים כי $A \cap B \neq \emptyset$ כיוון ש:

$$\{1,2\} \cap \{1,2\} = \{1,2\}$$

$$\{1,2\} \cap \{2,3\} = \{2\}$$

$$\{1,2\} \cap \{1,4\} = \{1\}$$

נוכיח כי Y כן מפרידה!

תהי $A \in Y$ צריך למצוא או לבחור $B \in Y$ כך ש $A \cap B = \emptyset$

כיוון ש$A \in Y$ קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש

$$A = \{n+1, n+2\}$$

נבחר

$$B = \{(n+2)+1, (n+2)+2\} \in Y$$

כמובן ש

$$A \cap B = \emptyset$$

Z אינה מפרידה כיוון ש $\{1\} \in Z$ ולכל $B \in Z$ מתקיים כי

$$\{1\} \subseteq B = \{1,2,\dots,n\}$$

ולכן

$$\{1\} \cap B = \{1\} \neq \emptyset$$

<u>שאלה 7:</u> הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A \subseteq B$ וכן $B \cap C \neq \emptyset$ אזי $A \cap C \neq \emptyset$.

ב. לכל שלוש קבוצות A,B,C אם $A \cap (B \cap C) \neq \emptyset$ אזי $(A \cap B) \cup C \neq \emptyset$.

סעיף א': הפרכה

נבחר $A = \emptyset$ ו$B = C = \{1\}$

אכן $A \subseteq B$ וכן $B \cap C \neq \emptyset$

אבל

$$A \cap C = \emptyset$$

סעיף ב':

תהיינה A,B,C כך ש $A \cap (B \cap C) \neq \emptyset$

נחלק למקרים אם $C = \emptyset$ אז מקבלים סתירה לנתון.

לכן $C \neq \emptyset$

ולכן

$$C \subseteq (\dots) \cup C$$

ולכן בפרט

$$C \subseteq (A \cap B) \cup C$$

ולכן

$$(A \cap B) \cup C \neq \emptyset$$