

תרגיל בית 3 במבנים אלגבריים 89-214 סמסטר א' תשע"ו

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום בכל דף שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. תאריך הגשת התרגיל הוא לתרגול בשבוע המתחיל בתאריך ג' כסלו ה'תשע"ו, 15.11.2015.

שאלה 1. בכל סעיף, קבעו האם תת-הקבוצה הנתונה היא תת-חבורה:

א. $6\mathbb{Z}_8 = \{6k | k \in \mathbb{Z}_8\} \subseteq \mathbb{Z}_8$

ב. $k\mathbb{Z}_n \subseteq \mathbb{Z}_n$ כאשר $(k, n) = 1$.

ג. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\} \subseteq GL_3(\mathbb{Z}_p)$

תזכורת: $GL_3(\mathbb{Z}_p)$ היא חבורת המטריצות ההפיכות מעל \mathbb{Z}_p מסדר 3×3 .

ד. $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ is invertible and } f(1) > 0\} \subseteq \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ is invertible}\}$

ה. $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ is invertible and } f(1) = 1\} \subseteq \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f \text{ is invertible}\}$

(בשני הסעיפים האחרונים הפעולה היא הרכבת פונקציות)

שאלה 2. תהי G חבורה, ויהיו $H, K \leq G$ תתי-חבורות של G . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $H \cap K \leq G$ היא תת-חבורה של G .

ב. $H \cup K \leq G$ היא תת-חבורה של G .

שאלה 3. תהי G חבורה, ויהיו $a, b \in G$. הוכיחו או הפריכו את כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם $o(a), o(b) < \infty$, אזי $o(ab) < \infty$ וכן $o(ab) = o(a)o(b)$.

ב. $o(ab) = o(ba)$ (יש להתייחס גם למקרה שבו הסדר אינסופי).

שאלה 4. נתונות החבורות \mathbb{Z}_7, U_{12} ו- U_{14} .

א. חשבו (עם הסבר מפורט) את הסדר של 11 ב- U_{12} וב- U_{14} .

ב. לגבי כל חבורה, קבעו האם היא ציקלית. אם קבעתם שכן – מצאו יוצר מפורש של החבורה, והוכיחו שהוא יוצר את החבורה. אם קבעתם שלא – הסבירו מדוע אין איבר היוצר את החבורה.

שאלה 5. תהי $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ חבורה אבלית סופית. יהי איבר $b = a_1 a_2 \dots a_n$.

א. הוכיחו $b^2 = e$.

ב. הוכיחו שאם אין ב- G איבר מסדר 2, אז $b = e$.

ג. בשפת התכנות C הניחו שהיצוג של הטיפוס unsigned char הוא של 8 סיביות (כלומר משתנה מטיפוס זה הוא בין 0 לבין 255 כולל). הסבירו מה תהיה התוצאה של קטע הקוד הבא בעזרת בסעיפים הקודמים:

```
unsigned char b=0;
unsigned int i=0;
for (i=0; i <= 255; i++) {
    b += i;
}
printf("%d\n", b);
```

בהצלחה!