

בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מס': 8821105
מרצה: פרופ' מיכאל מגרל
תאריך: 28.08.06 מועד א'
חומר עזר: רק מחשבון
משך המבחן: שעתיים

השאלות:

5 מתוך 6

1. מעל קבוצה $R \times R^*$ נגדיר פעולה $(a_1, b_1) \bullet (a_2, b_2) = (a_1 + b_1 a_2, b_1 b_2)$.

הוכח:

א. $G = (R \times R^*, \bullet)$ חבורה

ב. היא לא אבלית.

ג. קיים מונומורפיזם $G \rightarrow GL_2(R)$

(כאשר $GL_2(R)$ חבורת מטריצות ממשיות 2×2 הפיכות).

ד. החבורה היא פתירה.

2. נסמן $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ ("הקומוטטור") של $a, b \in G$ בחבורה G .

נגדיר ת"ח $G' := \langle \{[a, b] : a, b \in G\} \rangle \leq G$ ("הקומוטנט") הנוצרת ע"י קבוצת

הקומוטטורים. הוכח:

א. $G' \triangleleft G$

ב. G/G' אבלית.

ג. אם $f: G \rightarrow Y$ הומומורפיזם וחבורה Y אבלית אזי $G' \subseteq \ker f$.

3. א. הוכח משפט קיילי.

ב. הוכח כי קיימת תת חבורה H בחבורה S_{97} כך ש H איזומורפית לחבורה

$$G = \langle \text{cis}(\frac{17}{25}\pi) \rangle$$

ג. הוכח (לנמק היטב) ש $S_7 = \langle (1,2,3,4,5,6,7), (5,4) \rangle$

ד. תאר תמונות אפימורפיות של החבורות $D_3, \langle \text{cis}\sqrt{3}\pi \rangle$

4. א. כמה יוצרים יש לחבורה $\Omega_{100} \times Z_{49}$?
 ב. באמצעות משפט Euler מצא 2 ספרות אחרונות של המספר $36704348073767^{1998} + 2006$.
 ג. הוכח שאם $n = p$ ראשוני אז במונויד (Z_n, \bullet) $[x]^{-1} = [x]$ אם ורק אם $[x] = [1]$
 או $[x] = [p-1]$.
 ד. הוכח (בעזרת ג'): לכל p ראשוני מתקיים $p \mid (p-1)! + 1$.

5. א. הוכח משפט Sylow 1.
 ב. הוכח או הפוך: קיימת חבורה לא פתירה עם 77 איברים.
 ג. הוכח או הפוך: קיימת חבורה פשוטה עם 99 איברים.

6. א. הוכח משפט Burnside על מספר מסלולים.
 ב. כמה איברים מתחלפים עם התמורה $a := (2,6,5,3)$ בחבורה S_9 ?
 ג. נתונה פעולה $G \times X \rightarrow X$ כאשר $G := D_7$ ו $|X| = 19$.
 הוכח או הפוך: קיימת נקודת שבת.
 ד. כמה לוחות 5×5 לא שקולים (לגבי הסיבובים) קיימים אם מותר לצבוע ב 3 צבעים קבועים.

בהצלחה ושנה טובה !