

תרגיל 4

להגשה ב: הקבוצות של: יום ג': 23.11, יום ד': 24.11, יום ה': 25.11. שימו לב: ההגשה היא רק לקבוצות שאתם רשומים אליהן. במקרה ותגישו לקבוצות אחרות ללא אישור, התרגיל שלכם לא ייבדק.

**נא לכתוב על התרגילים שם, ת.ז. ומספר קבוצת תרגול!**

1. (א) מצאו את כל האיברים ב-  $GL_2(\mathbb{Z}_2)$  (חבורת המטריצות ההפיכות כאשר הכניסות הן ב-  $\mathbb{Z}_2$ ).  
 (ב) מצאו איבר  $g$  מסדר 3 בחבורה זו ומצאו את המחלקות השמאליות של  $\langle g \rangle$ .

2.

(א) מצאו את המחלקות השמאליות של החבורה הנוצרת ע"י  $\langle 9 \rangle$  בחבורה  $U_{14} = Euler(14)$ .  
 (ב) מצאו את המחלקות השמאליות של הת"ח הנוצרת ע"י  $(2,2)$  בחבורה  $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_3$ .  
 (ג) מצאו את כל המחלקות השמאליות של  $H = \langle 15 \rangle$  ב-  $\mathbb{Z}_{20}$ .

3. נסתכל על החבורה  $G = GL_2(\mathbb{Q})$  ובתת-קבוצה  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q} \right\}$ . הוכיחו ש-  $H$  היא תת-חבורה של  $G$  וחשבו את  $[G:H]$ .

4. תהי  $G = S_{17}$ , ויהיו  $a = (1\ 3\ 5)$ ,  $b = (2\ 6\ 10\ 11\ 12)$  מחזוריים ב-  $G$ .  
 (i) כמה איברים יש בתת-חבורה  $H$  של  $G$  הנוצרת על ידי  $a$  ו-  $b$ ? מהו  $[G:H]$ ?  
 (ii) האם קיימים שני איברים  $c, d$  ב-  $G$  כך שהסדר של התת חבורה  $\langle c, d \rangle$  הוא 60? אם כן, מצאו אותם.

5. תהי  $D_4$  החבורה הדיהדרלית  $a, b \in D_4$  (כאשר  $b$  איבר מסדר 2 – שיקוף, ו-  $a$  איבר מסדר 4 – סיבוב ב- 90 מעלות).  
 נגדיר את תתי החבורות הציקליות  $H = \langle b \rangle$ ,  $K = \langle a^2 \rangle$ .  
 (א) כתבו במפורש את אברי תת החבורה  $H$  ו-  $K$ . חשבו את  $[G:K]$ ,  $[G:H]$ .  
 (ב) כתבו את המחלקות השמאליות של  $H$  ו-  $K$  ב-  $G$  ובדקו אם המחלקות הימניות שוות למחלקות השמאליות.

6. מצאו כמה איברים יש בכל חבורה ואם החבורות הבאות ציקליות. אם כן, מצאו יוצר:  
 (א) התת חבורה הנוצרת על ידי  $a = (1\ 4\ 5)$ ,  $b = (3\ 6)$  ב-  $S_6$ .  
 (ב)  $U_{11}$   
 (ג)  $U_{16}$   
 (ד) התת חבורה הנוצרת על ידי  $a = (4,5)$ ,  $b = (2,9)$  ב-  $\mathbb{Z}_{14} \times \mathbb{Z}_{20}$ .  
 (ה) התת חבורה הנוצרת על ידי  $a = (1\ 2)(3\ 4)$ ,  $b = (1\ 3)(2\ 4)$  ב-  $S_4$ .

7. תנו דוגמא לחבורה ותת-חבורה  $H$  המראות שההתאמה  $Hx \rightarrow xH$  אינה בהכרח מוגדרת היטב.