תרגול כיתה 5 – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה
הסתברות אלמנטרית, הסתברות מותנה

כללי הסתברות בסיסיים

יהיו A,B מאורעות כלשהם מאותו מרחב מדגם Ω.

1. כלל המשלים: $P(B)+P(B^c)=1$ סימון אחר למשלים: $\left[B^c \equiv \bar{B}\right]$.
2. כלל חיבור מאורעות: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
   - אם A,B זרים אזי: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$
3. אם A,B בלתי תלויים אזי: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

כללי דה-מורגן

(1). $(A\cup B)^c = A^c \cap B^c$ (2). $(A\cap B)^c = A^c \cup B^c$

מרחב הסתברות סימטרי (אחיד)

מרחב הסתברות סימטרי – מרחב שבו לכל אחד מהמאורעות האפשריים הסתברות שווה.

ההסתברות שמאורע A יתרחש היא: $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$

כאשר $|\Omega|$ – גודל מרחב המדגם. $|A|$ – גודל קבוצת המאורע A.

נוסחת ההכלה וההדחה (ההסתברותית)

יהיו $A_1, A_2, \ldots, A_n$ מאורעות, אזי:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=S_1-S_2+S_3-\ldots+(-1)^{n-1}S_n$$

כאשר:

$$S_1=\sum_{i=1}^{n}P(A_i),\quad S_2=\sum_{1\le i<j\le n}P(A_i\cap A_j),\quad S_3=\sum_{1\le i<j<k\le n}P(A_i\cap A_j\cap A_k),$$
$$\ldots\quad S_n=P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)$$

הסתברות מותנה

- נוסחת ההסתברות המותנה: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- נוסחת ההסתברות השלמה: $P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)$ כאשר: $\sum_{i=1}^{n}P(B_i)=1$ $\quad \forall i\neq j, B_i\cap B_j=\emptyset$
- נוסחת בייס: $P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$
- נוסחת בייס המוכללת: $P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_i P(A|B_i)P(B_i)}$

<u>שאלה 1</u>

הסיכוי לעבור מבחן באנגלית הוא 0.7, הסיכוי לעבור מבחן בביולוגיה הוא 0.4. הסיכוי להיכשל בלפחות אחד מהמבחנים הנ"ל הוא 0.75.

א. מה הסיכוי לא לעבור אף מבחן מהשניים?

ב. מה הסיכוי לעבור את המבחן באנגלית בלבד?

<u>פתרון</u>

נסמן: A – לעבור את המבחן באנגלית, נתון: $P(A)=0.7$.

B – לעבור את המבחן בביולוגיה, נתון: $P(B)=0.4$.

הסיכוי להיכשל בלפחות אחד מהמבחנים נתון: $P\left(A^c\cup B^c\right)=0.75$.

א. נדרשים למצוא $P\left(A^c\cap B^c\right)$. נעזר בכלל החיבור-

$$\begin{aligned}P\left(A^c\cap B^c\right) &= P\left(A^c\right)+P\left(B^c\right)-P\left(A^c\cup B^c\right)\\ &=0.3+0.6-0.75=0.15\end{aligned}$$

ב. הסיכוי לעבור את המבחן באנגלית בלבד $P\left(A\cap B^c\right)$. נמצא ביטוי להסתברות זו:

$$\begin{aligned}P(A) &= P\left[\left(A\cap B^c\right)\cup P(A\cap B)\right]\\ &=P\left(A\cap B^c\right)+P(A\cap B)-P\left[\left(A\cap B\cap B^c\right)\right]\\ &=P\left(A\cap B^c\right)+P(A\cap B)\\ \Rightarrow P\left(A\cap B^c\right)&=P(A)-P(A\cap B)\end{aligned}$$

כעת, $$P(A\cap B)=1-P\left[(A\cup B)^c\right]\overset{(*)}{=}1-P\left(A^c\cup B^c\right)=1-0.75=0.25$$

(*) המעבר בעזרת כללי דה מורגן.

וההסתברות המבוקשת- $$P\left(A\cap B^c\right)=P(A)-P(A\cap B)=0.7-0.25=0.45$$

<u>שאלה 2</u>

מגרילים מספר טבעי מהטווח $[1,2,\ldots,30k]$ $(k\in\mathbb{N})$. מה ההסתברות שאינו מתחלק ב- 2 או 3 או 5?

<u>פתרון:</u>

נסמן: המאורע E – המספר המוגרל מתחלק ב- 2 או 3 או 5.

המאורעות E_i – "המספר המוגרל מתחלק ב- i" $(i=2,3,5)$.

המאורע המבוקש $P\left(E^c\right)=1-P(E)=1-P\left(E_2\cup E_3\cup E_5\right)$

מכיוון שעלולה להיות חפיפה, מס' מתחלק ביותר מגורם אחד (למשל 6 מתחלק ב-2 ו-3) – ההסתברות המבוקשת מתקבלת בעזרת נוסחת ההכלה וההדחה:

$$\begin{aligned}P\left(E_2\cup E_3\cup E_5\right)&=\left[P\left(E_2\right)+P\left(E_3\right)+P\left(E_5\right)\right]\\ &-\left[P\left(E_2\cap E_3\right)-P\left(E_2\cap E_5\right)-P\left(E_3\cap E_5\right)\right]+P\left(E_2\cap E_3\cap E_5\right)\end{aligned}$$

נחשב כ"א מהמרכיבים דלעיל:

$$\left|E_2\right|=15k,\ \left|E_3\right|=10k,\ \left|E_5\right|=6k \qquad \left|E_2\cap E_3\right|=5k,\ \left|E_2\cap E_5\right|=3k,\ \left|E_3\cap E_5\right|=2k$$

$$\left|E_2\cap E_3\cap E_5\right|=k$$

מרחב ההסתברות סימטרי כי לכל מספר הסתברות שווה לצאת בהגרלה, לכן ההסתברות המבוקשת-

$$1-P\left(E_2\cup E_3\cup E_5\right)=1-\frac{1}{30k}\left([15k+10k+6k]-[5k-3k-2k]+k\right)=1-\frac{22}{30}=\frac{8}{30}$$

<u>שאלה 3</u>

בקופסה 4 מטבעות. נסמן ב- p_i - את ההסתברות לקבלת "עץ" בהטלת המטבע ה- i.

נתון: $p_1 = 0,\ p_2 = 0.25,\ p_3 = 0.5,\ p_4 = 0.75$. מטבע נבחר באופן אקראי ובהסתברות שווה מהקופסה.

א. המטבע שנבחר מוטל פעם אחת. מהי ההסתברות לקבל עץ בהטלה זו?
ב. ידוע שהתקבל עץ בהטלת המטבע שנבחר. מהי ההסתברות שהמטבע שנבחר הוא מטבע מספר 4?
ג. המטבע שנבחר הוטל פעם אחת והתקבל עץ. מטילים שוב את אותו מטבע, מהי ההסתברות לקבל עץ בהטלה זו?
ד. המטבע שנבחר מוטל שוב ושוב עד קבלת עץ. מה ההסתברות שמספר ההטלות הוא בדיוק 3?

<u>פתרון:</u>

נסמן: P_i = {קבלת עץ בהטלת מטבע i }.　　נתון: $P_1 = p_1 = 0,\ P_2 = p_2 = \frac{1}{4},\ P_3 = p_3 = \frac{1}{2},\ P_4 = p_4 = \frac{3}{4}$

א. נחשב בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(tree) = \sum_{i=1}^{4} P(tree \mid coin\ i) P(coin\ i)$$
$$= P(t \mid \#1)\, p_1 + P(t \mid \#2)\, p_2 + P(t \mid \#3)\, p_3 + P(t \mid \#4)\, p_4 = 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

ב. ההסתברות המבוקשת מתקבלת מנוסחת בייס:

$$P(coin\ \#4 \mid tree) = \frac{P(tree \mid coin\ \#4) P(coin\ \#4)}{P(tree)} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{2}$$

ג. ההסתברות המותנה המבוקשת:

$$P(2\ trees \mid tree) = \frac{P(2\ trees \cap tree)}{P(tree)} = \frac{P(2\ trees)}{P(tree)}$$
$$= \frac{\frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2}{\frac{3}{8}} = \frac{7}{12}$$

ד. נחשב בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(3\text{ throws}) = \sum_{i=1}^{4} P(3\text{ throws} \mid coin\ \#i) \cdot P(coin\ \#i)$$
$$= 1^2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = 0.078125$$

<u>שאלה 4</u>

במפעל מייצרים מכסי פח באמצעות 3 מכונות כבישה. במכונה א' מיוצרים 25% מכלל הפריטים, במכונה ב' מיוצרים 35% מכלל הפריטים ובמכונה ג' מיוצרים 40% מכלל הפריטים. אחוז הפריטים הפגומים במכונה א' הוא 5%, במכונה ב' 4% ובמכונה ג' 2%. כל הפריטים מובלים למיכל אחסון משותף בגמר הייצור.

א. מה ההסתברות שפריט במיכל האחסון פגום נוצר במכונה א'?

ב. מה ההסתברות שפריט פגום במיכל האחסון לא נוצר במכונה ב'?

<u>פתרון:</u>

נגדיר את המאורעות: A – הפריט נוצר במכונה א', נתון: $P\left(A\right)=0.25$

B – הפריט נוצר במכונה ב', נתון: $P\left(B\right)=0.35$

C – הפריט נוצר במכונה ג', נתון: $P\left(C\right)=0.4$

D – הפריט פגום.

א. נעזר בנוסחת בייס: $P(A|D)=\dfrac{P(A)\cdot P(D|A)}{P(D)}$

לחישוב המכנה $P\left(D\right)$ נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה:

$P(D)=P(A)\cdot P(D|A)+P(B)\cdot P(D|B)+P(C)\cdot P(D|C)$,

מהנתונים: $P(D|A)=0.05,\quad P(D|B)=0.04,\quad P(D|C)=0.02$

הצבה בנוסחה נותנת $0.0345 \;=\; 0.25\cdot 0.05+0.35\cdot 0.04+0.4\cdot 0.02$

נציב הכל בנוסחת בייס:

$$P(A|D)=\frac{P(A)\cdot P(D|A)}{P(D)}=\frac{0.25\cdot 0.05}{0.0345}=0.362$$

ב. המאורע " לא נוצר במכונה ב" מתורגם ל-"נוצר במכונה א' או במכונה ג" $\left(\bar{B}=A\cup C\right)$.

נציב בנוסחת בייס:

$$P(\bar{B}|D)=\frac{P(A)\cdot P(D|A)+P(C)\cdot P(D|C)}{P(D)}=\frac{0.25\cdot 0.05+0.4\cdot 0.02}{0.0345}=0.594$$

<u>שאלה 5</u>

מטילים מטבעות הוגנים בזה אחר זה על הרצפה עד להופעת "עץ" ראשון ואז בוחרים מטבע באקראי מהמטבעות שהוטלו. מה הסיכוי שנבחר עץ?

<u>פתרון:</u>

נסמן ב- A_n את המאורע בו עץ הופיע בהטלה ה-n-ית. כעת, $P(A_n)=\dfrac{1}{2^n}$.

נסמן ב- B את המאורע שבו נבחר עץ. אזי, $P(B|A_n)=\dfrac{1}{n}$. בעזרת נוסחת ההסתברות השלמה-

$$P(B)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B|A_n)\cdot P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=\ln(2)$$

הערה: (פחות חשוב לקורס) סכום הטור מתקבל מהצבת $x=1/2$ בפיתוח טיילור $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln\left(1-x\right)$

<u>שאלה 6</u>
נתונים שלושה כדים. בכד הראשון יש כדור לבן אחד ו-3 כדורים שחורים, בכד השני יש 2 כדורים לבנים ו-2 כדורים שחורים ובכד השלישי יש 3 כדורים לבנים וכדור שחור אחד. בוחרים אחד מן הכדים באקראי ומוצאים ממנו באופן מקרי שני כדורים ללא החזרה. מהי ההסתברות שהתקבל לפחות כדור לבן אחד?
<u>פתרון:</u>

נגדיר את המאורעות: A – התקבל לפחות כדור לבן אחד בהוצאת 2 כדורים.
המאורעות B_i – יש i כדורים לבנים בכד $(i=1,2,3)$.

נעזר בנוסחת ההסתברות השלמה:
$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)$$
נחשב את ההסתברויות: $(a).\ P(A|B_1)=1-\binom{3}{2}\Big/\binom{4}{2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$(b).\ P(A|B_2)=1-\binom{2}{2}\Big/\binom{4}{2}=\frac{5}{6}$

$(c).\ P(A|B_3)=1$

הערה: $(a),(b)$ – חושבו דרך המאורע המשלים: "הוצאו 2 כדורים שחורים מהכד".

נציב את הכל בנוסחה: $P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{7}{9}$