דיסיונקציה / קוניונקציה של שתי טענות שקולה לוגית קוניונקציה / דיסיונקציה של שלילת שתי הטענות.

שני דפוסי־טענות שקולים לוגית, אם בלי קשר לטענות המוצבות במקום מישתני הפסוקים שלהם — כאשר אותן הטענות באות במקום אותם מישתני הפסוקים בשני דפוסי־הטענות — זוגות הטענות המתקבלות מכך הן שקולות. הואיל ו־$\sim(p \cdot \sim q)$ ו־$\sim p \vee q$ שקולים זה לזה לוגית (לפי חוק דה־מורגאן וחוק השלילה הכפולה), אין שום נימוק לוגי להגדיר את $p \supset q$ כ־$\sim(p \cdot \sim q)$, ולא כ־$\sim p \vee q$. והאחרון הוא הגדרה שכיחה יותר לסמל הפרסה.

קיים יחס חשוב בין טאוטולוגיות וארגומנטים תקפים. לכל ארגומנט תואמת טענת־תנאי אשר הרישא שלה היא הקוניונקציה של הקדמות הארגומנט ואשר הסיפא שלה היא מסקנת הארגומנט. וכך, לכל טיעון בעל הצורה

$$p \supset q$$
$$p$$
$$\therefore q$$

תואמת טענת־תנאי בעלת הצורה $[(p \supset q) \cdot p] \supset q$. ברור כי לוח אמת המוכיח כי דפוס הטיעון תקף גם יראה כי דפוס־טענת־התנאי התואם אותו הוא טאוטולוגי. דפוס־טיעון תקף אם ורק אם בלוח האמת שלו יש **א** בעמודת המסקנה בכל שורה שבה יש **א** בכל עמודות הקדמותיה. אולם **ש** יכול להופיע בעמודה של דפוס־טענת־התנאי התואם רק כאשר ישנן אותיות **א** בכל ההקדמות ו־**ש** במסקנה. לכן רק אותיות **א** יופיעו בעמודת טענת־התנאי התואמת ארגומנט תקף. וכך, לכל ארגומנט תקף הבנוי על סמך פונקציות האמת שנדונו בפרק זה, הטענה שהקדמותיו גוררות את מסקנתו היא טאוטולוגיה.

תרגילים

I. השתמש בלוחות אמת כדי לאפיין את דפוסי־הטענות הללו כטאוטולוגיות, סותרות את עצמן או קונטינגנטיות:

* 1. $[p \supset (p \supset q)] \supset q$

2. $p \supset [(p \supset q) \supset q]$

3. $(p \cdot q) \cdot (p \supset \sim q)$

4. $p \supset [\sim p \supset (q \vee \sim q)]$

(q v ~q)

* 5. $p \supset [p \supset (q \cdot \sim q)]$

6. $(p \supset p) \supset (q \cdot \sim q)$

7. $[p \supset (q \supset r)] \supset [(p \supset q) \supset (p \supset r)]$

8. $[p \supset (q \supset p)] \supset [(q \supset q) \supset \sim (r \supset r)]$

9. $\{[(p \supset q) \cdot (r \supset s)] \cdot (p \vee r)\} \supset (q \vee s)$

10. $\{[(p \supset q) \cdot (r \supset s)] \cdot (q \vee s)\} \supset (p \vee r)$

II. השתמש בלוחות אמת כדי לקבוע איזה מכפולי־התנאי דלהלן הם טאוטולוגיות:

* 1. $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$

2. $(p \supset q) \equiv (\sim p \supset \sim q)$

3. $[(p \supset q) \supset r] \equiv [(q \supset p) \supset r]$

4. $[p \supset (q \supset r)] \equiv [q \supset (p \supset r)]$

* 5. $p \equiv [p \cdot (p \vee q)]$

6. $p \equiv [p \vee (p \cdot q)]$

7. $p \equiv [p \cdot (p \supset q)]$

8. $p \equiv [p \cdot (q \supset p)]$

9. $p \equiv [p \vee (p \supset q)]$

10. $(p \supset q) \equiv [(p \vee q) \equiv q]$

VI. הפרדוקסים של האימפליקציה המטריאלית

ישנם שני דפוסי־טענה, $p \supset (q \supset p)$ ו־$\sim p \supset (p \supset q)$, אשר קל להוכיח שהם טאוטולוגיים. ככל שדפוסי־טענה אלה עשויים להיות פחותי־ערך בניסוחם הסימלי, כשהם מובעים בעברית רגילה הם נראים מפתיעים ואף פרדוקסליים. את הראשון אפשר להביע כך: ״אם טענה הינה אמיתית, הרי שהיא נגררת אחר כל טענה שבעולם״. הואיל וזוהי אמת כי כדור־הארץ עגול, יוצא כי ״הירח עשוי גבינה ירוקה גורר שכדור־הארץ עגול״; וזה באמת מוזר מאוד, במיוחד משום שגם יוצא כי ״הירח איננו עשוי גבינה ירוקה גורר שכדור־הארץ עגול״. את הטאוטולוגיה השנייה אפשר להביע כך: ״אם טענה הינה שקרית, הרי שהיא גוררת כל טענה שבעולם״. הואיל וזהו שקר כי הירח עשוי גבינה ירוקה, יוצא כי ״הירח עשוי גבינה ירוקה גורר שכדור־הארץ עגול״, וזה מוזר עוד הרבה יותר, כשאנו מכירים כי גם יוצא ש״הירח עשוי גבינה ירוקה גורר שכדור־הארץ איננו עגול״.

הדבר נראה פרדוקסלי משום שאנו מאמינים כי צורת כדור־הארץ וחומר הירח הם בהחלט לא־רלוונטיים זה לזה, ואנו גם מאמינים ששום טענה, אמיתית או שקרית, איננה עשויה באמת לגרור טענה אחרת כלשהי, אמיתית

8. אם מר ג׳ונס הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי ששכרו השנתי של ג׳ונס נחלק לשלושה בלי שארית. אם שכרו השנתי של ג׳ונס נחלק לשלושה בלי שארית, הרי ש־20,000 לירות נחלקות לשלושה בלי שארית. אולם 20,000 לירות אינן נחלקות לשלושה בלי שארית. אם מר רובינסון הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי שמר רובינסון גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו. אם מר רובינסון גר בדטרויט, הרי שאין הוא גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו. מר רובינסון גר בדטרויט. אם מר ג׳ונס איננו שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי או שמר רובינסון או שמר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן. לכן מר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן. (J — ג׳ונס הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן; E — שכרו השנתי של ג׳ונס נחלק לשלושה בלי שארית; T — 20,000 לירות נחלקות לשלושה בלי שארית; R — רובינסון הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן; H — רובינסון גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו; D — רובינסון גר בדטרויט; S — סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן.)

9. אם מר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן, הרי שמר סמית גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו. אם מר סמית גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו, הרי שאין הוא גר בשיקגו. מר סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן. אם מר רובינסון גר בדטרויט, הרי שאין הוא גר בשיקגו. מר רובינסון גר בדטרויט. מר סמית גר בשיקגו, ולא — או שמר רובינסון או שמר ג׳ונס גרים בשיקגו. אם מר ג׳ונס גר בשיקגו, הרי שהבלמן הוא ג׳ונס. לכן הבלמן הוא ג׳ונס. (S — סמית הוא שכנו הקרוב ביותר של הבלמן; W — סמית גר במחצית הדרך בין דטרויט ושיקגו; L — סמית גר בשיקגו; D — רובינסון גר בדטרויט; I — רובינסון גר בשיקגו; C — ג׳ונס גר בשיקגו; B — הבלמן הוא ג׳ונס.)

10. אם סמית ניצח פעם את המסיק בביליארד, הרי שסמית איננו המסיק. סמית ניצח פעם את המסיק בביליארד. אם הבלמן הוא ג׳ונס הרי שג׳ונס איננו המסיק. הבלמן הוא ג׳ונס. אם סמית איננו המסיק וג׳ונס איננו המסיק, הרי שרובינסון הוא המסיק. אם הבלמן הוא ג׳ונס ורובינסון הוא המסיק, הרי שסמית הוא המפעיל. לכן סמית הוא המפעיל. (O — סמית ניצח פעם את המסיק בביליארד; M — סמית הוא המסיק; B — הבלמן הוא ג׳ונס; N — ג׳ונס הוא המסיק; F — רובינסון הוא המסיק; G — סמית הוא המפעיל.)

ישנם ארגומנטים תקפים רבים הבנויים מפונקציות אמת אשר אי־אפשר להוכיח את תקפותם אם משתמשים רק בתשעת כללי ההיסק שניתנו עד כה. למשל, כדי לבנות הוכחה צורנית לתקפותו של הארגומנט (התקף באופן גלוי)

$$A \supset B$$
$$C \supset \sim B$$
$$\therefore A \supset \sim C$$

נדרשים כללים נוספים.

בכל טענה מורכבת באמצעות קשרי־אמת, אם רכיב שבתוכה מוחלף בטענה אחרת בעלת אותו ערך אמת, ערך האמת של הטענה המורכבת יישאר בעינו. אולם הטענות המורכבות היחידות המעסיקות אותנו כאן הן טענות המורכבות באמצעות קשרי־אמת. נוכל לקבל איפוא ככלל היסק נוסף את כלל התחליף, המתיר לנו להסיק מכל טענה את תוצאת החלפת כולה או מקצתה בכל טענה אחרת השקולה לוגית לחלק שהוחלף. בהשתמשנו בחוק השלילה הכפולה (D.N.), הטוען כי p שקול לוגית ל־$\sim\sim p$, נוכל להסיק מתוך $A \supset \sim\sim B$ כל אחד מאלה:

$$A \supset B,\ \sim\sim A \supset \sim\sim B,\ \sim\sim(A \supset \sim\sim B),\ A \supset \sim\sim\sim\sim B$$

בדרך התחליף.

כדי להגדיר היטב את הכלל החדש, אנו מונים מספר שקילויות שהן טאוטולוגיות או אמיתיות לוגית, שעימן אפשר להשתמש בו, ושקילויות אלה מהוות את כללי־ההיסק הנוספים שנשתמש בהם כדי להוכיח תקפותם של ארגומנטים מורחבים. אנו מונים אותן בזו אחר זו בעקבות תשעת החוקים הראשונים שהוצגו קודם.

כלל התחליף: כל אחד מן הביטויים השקולים מבחינה כדלהלן יכול להחליף את משנהו כל אימת שהם מופיעים:

10. חוקי דה־מורגאן (De M.):
$$\sim(p \cdot q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$
$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \cdot \sim q)$$

11. חילוף (Com.):
$$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$$
$$(p \cdot q) \equiv (q \cdot p)$$

12. קיבוץ (Assoc.): $[p \vee (q \vee r)] \equiv [(p \vee q) \vee r]$
$[p \cdot (q \cdot r)] \equiv [(p \cdot q) \cdot r]$
13. פילוג (Dist.): $[p \cdot (q \vee r)] \equiv [(p \cdot q) \vee (p \cdot r)]$
$[p \vee (q \cdot r)] \equiv [(p \vee q) \cdot (p \vee r)]$
14. שלילה כפולה (D.N.): $p \equiv \sim\sim p$
15. טרנספוזיציה (Trans.): $(p \supset q) \equiv (\sim q \supset \sim p)$
16. אימפליקציה מטריאלית (Impl.): $(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$
17. שקילות מטריאלית (Equiv.): $(p \equiv q) \equiv [(p \supset q) \cdot (q \supset p)]$
$(p \equiv q) \equiv [(p \cdot q) \vee (\sim p \cdot \sim q)]$
18. אקספורטציה (Exp.): $[(p \cdot q) \supset r] \equiv [p \supset (q \supset r)]$
19. טאוטולוגיה (Taut.): $p \equiv (p \vee p)$
$p \equiv (p \cdot p)$

תשעה עשר כללי־ההיסק האלה הם במידת־מה עודפים, במובן זה שאין הם המינימום ההכרחי שהיה מספיק לתכליתנו, דהיינו, לבנות הוכחות צורניות לתקפותם של ארגומנטים מורחבים. למשל, מודוס טולנס יכול היה להישמט מן הרשימה בלי להחליש כלל באופן ממשי את מנגנון ההוכחה שלנו, שכן כל שורה התלויה במודוס טולנס אפשר להצדיקה אם במקומו מסתמכים על כללים אחרים שנמנו ברשימה. וכך, בהוכחה הצורנית אשר בראשית הפרק, נגזר $\sim A$ אשר בשורה השמינית משורות 4 ו־7, $\sim D$ ו־$A \supset D$, לפי מודוס טולנס, אולם אילו הושמט מודוס טולנס מבין כללי־ההיסק, בכל זאת יכולנו לגזור את $\sim A$ מתוך $A \supset D$ ו־$\sim D$. זאת ניתן היה לעשות בהכנסת שורת הביניים $\sim D \supset \sim A$, הנובעת מ־$A \supset D$ לפי כלל הטרנספוזיציה (Trans.), ואחר־כך בהשגת $\sim A$ מתוך $\sim D \supset \sim A$ ו־$\sim D$ לפי מודוס פוננס (M.P.). ברם, מודוס טולנס הוא כלל־היסק כה רגיל בשימוש וברור אינטואיטיבית, שהוא נכלל בכל אופן. גם כללים אחרים מקרב ה־19 עודפים באותו מובן.

רשימת 19 כללי־ההיסק מאופיינת לא רק בעודפות שבה, אלא גם בסוג מסויים של חסר. למשל, אם כי הארגומנט

$$A \vee B$$
$$\sim B$$
$$\therefore A$$

תקף אינטואיטיבית, צורתו

$$p \vee q$$
$$\sim q$$
$$\therefore p$$

איננה כלולה בכללי־היסק. המסקנה A איננה נובעת מן ההקדמות $A \vee B$ ו־$\sim B$ לפי שום כלל־היסק יחיד, אף־על־פי שאפשר לגזור אותה מהן לפי שני כללי־היסק. הוכחה צורנית לתקפותו של הארגומנט הנתון אפשר לכתוב כך:

1. $A \vee B$
2. $\sim B \;/ \therefore A$
3. $B \vee A$ 1, Com.
4. A 3.2, D.S.

יכולנו למנוע את החסר שצויין כאן בהוסיפנו כלל נוסף לרשימתנו, אולם אילו עשינו תוספות לכל מקרה כגון זה, היינו מסיימים ברשימה שהיא ארוכה מדי ולפיכך מסורבלת.

הרשימה הנוכחית של 19 כללי־ההיסק היא מערכת מישלמת של הלוגיקה של פונקציות האמת, במובן זה שהיא מאפשרת בניית הוכחה צורנית לתקפותו של כל ארגומנט תקף המבוסס רק על פונקציות אמת.[1]

מושג ההוכחה הצורנית הוא מושג יעיל, שפירושו כי אפשר לקבוע בדרך מוכנית לחלוטין, במספר מוגדר של שלבים, אם רצף טענות נתון הוא הוכחה צורנית או לאו (תוך הסתמכות על רשימה נתונה של כללי־היסק). אין צורך בשום חשיבה, בין במובן של חשיבה על "משמעותם" של הסימנים שברצף, ובין במובן השימוש באינטואיציה לוגית, כדי לבדוק תקפותו של שלב כלשהו. נדרשים שני דברים בלבד — הראשון הוא היכולת לראות כי טענה המופיעה במקום אחד זהה בדיוק לטענה המופיעה במקום אחר, שכן עלינו להיות מסוגלים לוודא כי טענות אחדות שבהוכחה הן הקדמות של הארגומנט המוכח כתקף וכי הטענה האחרונה שבהוכחה היא מסקנתו של אותו ארגומנט. והדבר השני הנדרש הוא היכולת לראות אם לטענה הנתונה

1. דרך להוכחה סוג זה של שלמות למערכת של כללי־היסק נמצאת בפרק השביעי של **Symbolic Logic**, הוצאה שלישית, מאת א. מ. קופי (ניו יורק: מקמילן, 1967).

מבנה מסויים או לאו, כלומר לראות אם היא מקרה הצבה של דפוס טענה נתון.

וכך, על כל שאלה, אם רצף הטענות שלמעלה הוא הוכחה צורנית לתקפות או לא, אפשר לענות באופן מוכני לחלוטין. ששורות 1 ו־2 הן הקדמות ושורה 4 היא המסקנה בארגומנט הנתון — ברור מן הבדיקה. ששורה 3 נובעת מן השורות הקודמות לפי אחד מכללי־ההיסק הנתונים — אפשר לקבוע במספר מוגדר של צעדים, אפילו בלי לכתוב את הסימון "1, Com." בצד. סימן ההסבר שבעמודה השנייה הוא סיוע ויש לכללו תמיד, אולם אין הוא, במובן הצר של המלה, חלק מן ההוכחה עצמה. בכל שורה יש רק מספר מוגדר של שורות קודמות ורק מספר מוגדר של כללי־היסק או דפוסים שיש להיוועץ בהם. אם כי הדבר מצריך זמן, אפשר לאמת בעזרת בדיקה והשוואת צורות כי שורה 3 איננה נובעת משורות 1 ו־2 לפי מודוס פוננס, או לפי מודוס טולנס, או לפי היקש היפותטי, ..., וכך הלאה, עד שבלכתנו בדרך זו אנו מגיעים לשאלה אם שורה 3 נובעת משורה 1 לפי חוק החילוף, ושם אנו רואים, פשוט בהביטנו בצורות, כי כן. באותה דרך אפשר לבחון במספר מוגבל של צעדים, כשרותו של כל שלב בהוכחה הצורנית ושום צעד מאלה איננו מכיל יותר מהשוואת צורות או קוויי־צביון. כדי לשמור על תכונה זו של יעילות אנו קובעים את החוק כי בכל פעם יש לעשות צעד אחד בלבד. אנו עלולים להתפתות לקצר את ההוכחה בצרפנו צעדים, אולם המקום והזמן שנחסכו הם פעוטים. חשובה יותר היא היעילות שאנו משיגים בעשותנו כל צעד וצעד בעזרת כלל־היסק אחד בכל פעם.

אם כי הוכחה צורנית לתקפות הינה יעילה במובן זה שאפשר לקבוע באופן מוכני בדבר כל רצף מוצג אם הוא הוכחה או לא, הרי בנייתה של הוכחה צורנית כזו איננה דרך יעילה. במובן זה הוכחות צורניות נבדלות מלוחות אמת. השימוש בלוחות אמת הוא מוכני לחלוטין: בקבלנו ארגומנט כלשהו מן הסוג שבו אנו עוסקים עתה, נוכל תמיד לבנות לוח אמת כדי לבחון את תקפותו בלכתנו לפי כללי הנוהל הפשוטים שקבענו בפרק הקודם. אולם אין בידינו שום כלל יעיל או מוכני לבניית הוכחות צורניות. כאן עלינו לחשוב או "להמציא" מהיכן להתחיל וכיצד להתקדם. ואף־על־פי־כן, הוכחת תקפותו של ארגומנט באמצעות הוכחה צורנית, תדיר שהיא קלה בהרבה מבנייה מוכנית לגמרי של לוח אמת ובו אולי מאות ואף אלפי שורות.

חובה להבין הבדל חשוב בין תשעת כללי־ההיסק הראשונים ועשרת האחרונים. את תשעת הכללים הראשונים אפשר להחיל רק על שורות

שלמות של ההוכחה. וכך, הטענה A יכולה להיות מוסקת מן הטענה $A \cdot B$ בדרך הפישוט רק אם $A \cdot B$ היא כל השורה. אולם הטענה $A \supset C$ איננה נובעת מן הטענה $(A \cdot B) \supset C$ בדרך הפישוט או לפי איזה שהוא כלל־היסק אחר. היא איננה נובעת כלל וכלל, שכן אם A אמיתית ואילו B ו־C שקריות שתיהן, $(A \cdot B) \supset C$ אמיתית, אולם $A \supset C$ שקרית. לעומת זאת, כל אחד מעשרת הכללים האחרונים יכול לחול הן על שורות שלמות והן על חלקי שורות. לא זו בלבד שאפשר להסיק את הטענה $A \supset (B \supset C)$ מן השורה השלמה $(A \cdot B) \supset C$ בדרך האקספורטציה, אלא שמן השורה $[(A \cdot B) \supset C] \vee D$ יכולים אנו להסיק בדרך האקספורטציה $[A \supset (B \supset C)] \vee D$. בדרך התהליף, ביטויים השקולים לוגית זה לזה יכולים להחליף זה את זה כל אימת שיופיעו, אפילו אין הם שורות שלמות בהוכחה. אולם בתשעת כללי־ההיסק הראשונים אפשר להשתמש רק כשהם חלים על שורות שלמות של הוכחה המשמשות כהקדמות.

אם כי אין בידינו כללים מוכניים לחלוטין לבניית הוכחות צורניות, אפשר להציע כמה כללי נוהל מעשיים, לא מלוטשים אך יעילים. הראשון — פשוט להתחיל בגזירת מסקנות מן ההקדמות הנתונות בעזרת כללי־ההיסק שניתנו. ככל שמזומנות יותר ויותר מסקנות־ביניים כהקדמות לדדוקציות נוספות, גוברת ההסתברות שנהיה מסוגלים לראות כיצד לגזור את המסקנה לארגומנט, כך שיוכח כתקף. דרך אחרת היא לעבוד אחורה — מן המסקנה ולחפש איזו טענה או טענות שמהן אפשר לגזור אותה, ואז לנסות לגזור טענות־ביניים אלה מן ההקדמות. עם זאת, אין תחליף לרכישת הניסיון המעשי לקניית המיומנות הדרושה לבניית הוכחות צורניות.

תרגילים

I. כל אחד מן הביטויים הללו הוא הוכחה צורנית לתקפותו של הארגומנט המצויין. נסח את ה"הצדקה" לכל שורה שאיננה הקדמה:

* .1
1. $\supset \cancel{AB}$ A→B
2. $C \supset \sim B \; / \therefore A \supset \sim C$
3. $\sim \sim B \supset \sim C$
4. $B \supset \sim C$
5. $A \supset \sim C$

.2
1. $(D \cdot E) \supset F$
2. $(D \supset F) \supset G \; / \therefore E \supset G$
3. $(E \cdot D) \supset F$
4. $E \supset (D \supset F)$
5. $E \supset G$

3.
1. $(H \vee I) \supset [J \cdot (K \cdot L)]$
2. $I \;/\therefore J \cdot K$
3. $I \vee H$
4. $H \vee I$
5. $J \cdot (K \cdot L)$
6. $(J \cdot K) \cdot L$
7. $J \cdot K$

4.
1. $(M \vee N) \supset (O \cdot P)$
2. $\sim O \;/\therefore \sim M$
3. $\sim O \vee \sim P$
4. $\sim (O \cdot P)$
5. $\sim (M \vee N)$
6. $\sim M \cdot \sim N$
7. $\sim M$

* 5.
1. $(Q \vee \sim R) \vee S$
2. $\sim Q \vee (R \cdot \sim Q) \;/\therefore R \supset S$
3. $(\sim Q \vee R) \cdot (\sim Q \vee \sim Q)$
4. $(\sim Q \vee \sim Q) \cdot (\sim Q \vee R)$
5. $\sim Q \vee \sim Q$
6. $\sim Q$
7. $Q \vee (\sim R \vee S)$
8. $\sim R \vee S$
9. $R \supset S$

6.
1. $T \cdot (U \vee V)$
2. $T \supset [U \supset (W \cdot X)]$
3. $(T \cdot V) \supset \sim (W \vee X) \;/\therefore W \equiv X$
4. $(T \cdot U) \supset (W \cdot X)$
5. $(T \cdot V) \supset (\sim W \cdot \sim X)$
6. $[(T \cdot U) \supset (W \cdot X)] \cdot [(T \cdot V) \supset (\sim W \cdot \sim X)]$
7. $(T \cdot U) \vee (T \cdot V)$
8. $(W \cdot X) \vee (\sim W \cdot \sim X)$
9. $W \equiv X$

7.
1. $Y \supset Z$
2. $Z \supset [Y \supset (R \vee S)]$
3. $R \equiv S$
4. $\sim (R \cdot S) \;/\therefore \sim Y$
5. $(R \cdot S) \vee (\sim R \cdot \sim S)$
6. $\sim R \cdot \sim S$
7. $\sim (R \vee S)$
8. $Y \supset [Y \supset (R \vee S)]$
9. $(Y \cdot Y) \supset (R \vee S)$
10. $Y \supset (R \vee S)$
11. $\sim Y$

8.
1. $A \supset B$
2. $B \supset C$
3. $C \supset A$
4. $A \supset \sim C \;/\therefore \sim A \cdot \sim C$
5. $A \supset C$
6. $(A \supset C) \cdot (C \supset A)$
7. $A \equiv C$
8. $(A \cdot C) \vee (\sim A \cdot \sim C)$
9. $\sim A \vee \sim C$
10. $\sim (A \cdot C)$
11. $\sim A \cdot \sim C$

9.
1. $(E \cdot D) \supset \sim F$
2. $F \vee (G \cdot H)$
3. $D \equiv E \;/\therefore D \supset G$
4. $(D \supset E) \cdot (E \supset D)$
5. $D \supset E$
6. $D \supset (D \cdot E)$
7. $D \supset \sim F$
8. $(F \vee G) \cdot (F \vee H)$
9. $F \vee G$
10. $\sim \sim F \vee G$
11. $\sim F \supset G$
12. $D \supset G$

10.
1. $(I \vee \sim \sim J) \cdot K$
2. $[\sim L \supset \sim (K \cdot J)] \cdot [K \supset (I \supset \sim M)] \;/\therefore \sim (M \cdot \sim L)$
3. $[(K \cdot J) \supset L] \cdot [K \supset (I \supset \sim M)]$
4. $[(K \cdot J) \supset L] \cdot [(K \cdot I) \supset \sim M]$
5. $(I \vee J) \cdot K$
6. $K \cdot (I \vee J)$
7. $(K \cdot I) \vee (K \cdot J)$
8. $(K \cdot J) \vee (K \cdot I)$
9. $L \vee \sim M$
10. $\sim M \vee L$
11. $\sim M \vee \sim \sim L$
12. $\sim (M \cdot \sim L)$

II. בנה הוכחה צורנית לתקפיתו של כל אחד מן הארגומנטים הללו, בהשתמשך בכל מקרה בסימון המוצע:

* 1. או שהמנהל לא הבחין בשינוי או שאחרת הוא מאשרו. הוא הבחין בו בלי שום ספק. כך שמן ההכרח שהוא מאשרו. (A, H)

2. החמצן שבשפופרת או שהתחבר עם החוט ויצר תחמוצת או שאחרת הוא נעלם כליל. החמצן שבשפופרת לא יכול להיעלם כליל. לכן החמצן שבשפופרת התחבר עם החוט ויצר תחמוצת. (N, H)

3. אם מדינאי הרואה כי דעותיו הקודמות היו מוטעות איננו משנה את דרכו, הוא נאשם בהונאה; ואם הוא משנה את דרכו, הוא צפוי להיות מואשם באי־עקיבות. או שהוא משנה את דרכו או שהוא איננו משנה. לכן או שהוא נאשם בהונאה או שהוא צפוי להיות מואשם באי־עקיבות. (I, H, M)

4. אין זה המקרה אשר או שהוא שכח או שלא היה מסוגל לסיים. לכן הוא היה מסוגל לסיים. (M, S)

* 5. אם נייר־הלקמוס הופך עינו לאדום, הרי שהתמיסה היא חומצה. לכן אם נייר־הלקמוס הופך עינו לאדום, הרי או שהתמיסה היא חומצה או שמשהו איננו כשורה אי־שם. (E, H, A)

6. יכולים להיות לו ידידים רבים רק אם הוא מכבדם כפרטים. אם הוא מכבדם כפרטים, הרי שאין הוא יכול לצפות שכולם יתנהגו באותה צורה. יש לו ידידים רבים. לכן אין הוא מצפה שכולם יתנהגו באותה צורה. (J, M, K)

7. אם בכיסיו של הקרבן נמצא כסף, הרי ששוד לא היה המניע לפשע. אולם שוד או נקם היו המניע לפשע. בכיסיו של הקרבן נמצא כסף. לכן מן ההכרח שנקם היה המניע לפשע. (K, S, N)

8. יש להאשים את נפוליון אם הוא ניצל כוח שלא עמד לרשותו בצדק. או שנפוליון היה שליט יחיד חוקי או שהוא ניצל כוח שלא עמד לרשותו בצדק. נפוליון לא היה שליט יחיד חוקי. לכן יש להאשים את נפוליון. (L, N, S)

9. אם נמשיך לתת אשראי לווילקינס, תהיה להם התחייבות מוסרית לזכות אותנו במכרז לפרוייקט הבא שלהם. באפשרותנו לחשב רווח שולי נדיב ביותר בהכנת אומדננו, אם יש להם התחייבות מוסרית לזכות אותנו במכרז בפרוייקט הבא שלהם. חישוב רווח שולי נדיב יותר בהכנת אומדננו יגרום למצבנו הכספי הכללי להשתפר ניכרות. לכן שיפור ניכר במצבנו הכספי הכללי יבוא בעקבות המשכת האשראי לווילקינס. (A, H, R, S)

* 10. אם החוקים טובים ואכיפתם קפדנית, הרי שהפשע יעלם. אם אכיפה קפדנית של החוק תגרום לפשע להעלם, הרי שבעייתנו היא מעשית. החוקים טובים. לכן בעייתנו היא מעשית. (T, K, J, M)

11. אילו היתה האזרחות הרומאית ערובה לחירויות האזרח, הרי שאזרחי רומא היו נהנים מחופש הדת. אילו היו אזרחי רומא נהנים מחופש הדת, לא היתה רדיפה של הנוצרים הראשונים. אולם הנוצרים הראשונים נרדפו. לכן אין זה אפשרי שהאזרחות הרומאית היתה ערובה לחירויות האזרח. (A, H, R)

12. אם האיבר הראשון של דיסיונקציה הוא אמיתי, הדיסיונקציה בשלמותה אמיתית. לכן אם שני איברי הדיסיונקציה אמיתיים, הרי שהדי־סיונקציה בשלמותה אמיתית. (R, S, B)

13. כדי שהבניין החדש של הרשות המקומית יעמוד במקום נוח, יש להקימו בלב הכרך; ובשביל שיהלום את תפקידו, יש לבנותו גדול כדי שיכון כל משרדי העירייה. אם הבניין החדש של הרשות המקומית מוקם בלב הכרך והוא גדול כדי שיכון כל משרדי העירייה, הרי שמחירו יעלה על

מיליון לירות. מחירו איננו יכול לעבור את מיליון הלירות. לכן או שהבניין החדש של הרשות המקומית יעמוד במקום לא־נוח או שלא יהלום את תפקידו. (N, L, H, G, M)

14. ג׳ונס יבוא אם יקבל את ההודעה, בתנאי שהוא מעוניין עדיין. אם כי לא בא, הוא עדיין מעוניין. לכן הוא לא קיבל את ההודעה. (B, H, M)

* 15. אם סיפור בריאת־העולם לפי תורת־משה נכון ככתבו וכלשונו, לא נבראה חמה לפני יום רביעי. ואם חמה לא נבראה לפני יום רביעי, לא היה אפשר שהיא הסיבה לחילופי היום והלילה בשלושת הימים הראשונים. אולם או שהמלה "יום" משמשת בכתבי־הקודש במובן אחר מן המקובל כרגיל עתה או שמן ההכרח שחמה היתה הסיבה לחילופי היום והלילה בשלושת הימים הראשונים. מכאן נובע כי או שסיפור בריאת־העולם לפי תורת־משה איננו נכון ככתבו וכלשונו או שהמלה "יום" משמשת בכתבי־הקודש במובן אחר מן המקובל כרגיל עתה. (T, N, H, J)

16. אם הפקיד או הקופאי לחצו על מתג האזעקה, המרתף היה נסגר אוטומטית והמשטרה היתה מגיעה תוך שלוש דקות. אילו הגיעה המשטרה תוך שלוש דקות, היתה מכוניתם של השודדים נתפסת. אולם מכונית השודדים לא נתפסה. לכן הפקיד לא לחץ על מתג האזעקה. (P, K, M, H, N)

17. אם אדם מונחה תמיד לפי רגש־החובה שלו, עליו לפסוח על הנאות רבות; ואם הוא מונחה תמיד לפי רצון־ההנאה שלה, עליו להזניח תדיר את מילוי חובתו. אדם או שהוא מונחה תמיד לפי רגש־החובה שלו או שהוא מונחה תמיד לפי רצון־ההנאה שלו. אם אדם מונחה תמיד לפי רגש־החובה שלו, אין הוא מזניח תדיר את מילוי חובתו; ואם הוא מונחה תמיד לפי רצון־ההנאה שלו, אין הוא פוסח על הנאות רבות. לכן חייב אדם לפסוח על הנאות רבות אם ורק אם אין הוא מזניח תדיר את מילוי חובתו. (R, P, H, Z)

18. החתן עשיר והכלה דלה אך ישרה. אם הכלה דלה והחתן עשיר, הרי או שהיא זכתה בזיווג טוב, או שהם יהיו חשוכי־בנים או שיהיו להם צרות משפחתיות. היא לא זכתה בזיווג טוב, אולם אין להם לא מריבות ולא צרות משפחתיות. מכאן שהם חשוכי־בנים. (A, D, J, Z, H, C, M)

19. או שהשודד נכנס בעד הדלת, או שהפשע נעשה מבפנים ומעורב בכך אחד השרתים. השודד יכול להיכנס בעד הדלת רק אם הבריח הוסט מבפנים; אולם אחד השרתים מעורב בכך בוודאי אם הבריח הוסט מבפנים. לכן אחד השרתים מעורב בכך. (D, M, S, B)

20. אם אשלם לחייט, לא יישאר ברשותי שום כסף. אוכל ללכת עם נערתי לרקוד רק אם יהיה לי כסף. היא תהיה אומללה אם לא אלך עימה לרקוד. אילם אם לא אשלם לחייט, הוא לא ימסור לי את חליפתי; ובלעדי החליפה ודאי שאינני יכול ללכת עם נערתי לרקוד. אני חייב או לשלם לחייט או לא לשלם לו. כך שמן ההכרח שנערתי תהיה אומללה! (S, K, R, V, H)

II. הוכחה לאי־תקפות

מובן כי ארגומנט לא־תקף אין הוכחה צורנית לתקפותו. אולם אם נכשלים מאמצינו לגלות הוכחה צורנית לתקפותו של ארגומנט נתון, אין כישלון זה מוכיח שהארגומנט איננו תקף, ושאין שום אפשרות לבנות הוכחה כזאת. אפשר שמשמעותו היחידה של הכישלון היא שלא ניסינו די. הסיבה לאי־יכולתנו למציא הוכחה לתקפות עלולה להיות העובדה שהארגומנט איננו תקף, אך היא יכולה גם להיות חוסר התושייה שלנו עצמנו — וזאת כתוצאה מאופיו הלא־יעיל של תהליך בניית ההוכחה. אי־היכולת לבנות הוכחה צורנית לתקפותו של ארגומנט איננה מוכיחה שהארגומנט לא־תקף. מה איפוא משמש כהוכחה שארגומנט נתון איננו תקף?

הדרך שתתואר כאן קשורה באופן הדוק לדרך לוחות האמת, אם כי היא קצרה ממנה בהרבה. יהיה לנו לעזר להיזכר כיצד בעזרת לוח אמת מוכיחים אי־תקפותו של דפוס טיעון לא־תקף. אם אפשר למצוא מקרה אחד ויחיד (שורה) שבו ערכי האמת נקבעים למישתנים הפסוקיים באופן כזה שההקדמות נעשות אמיתיות והמסקנה שקרית — הרי שדפוס הטיעון איננו תקף. אם נוכל איך שהוא לקבוע ערכי אמת לטענות הפשוטות המרכיבות ארגומנט, אשר יעשו את הקדמותיו אמיתיות ומסקנתו שקרית, הרי שקביעה זו תספיק כדי להוכיח אי־תקפותו של הארגומנט. קביעה כזו היא, למעשה, מה שלוחות האמת עושים. אולם אם נוכל לעשות קביעה כזו של ערכי אמת בלי לבנות ממש את כל לוח האמת, נחסוך חלק מן העבודה.

התבונן בארגומנט:

אם המושל חסיד השיכון הציבורי, הרי שהוא חסיד הגבלת היוזמה הפרטית.
אילו היה המושל קומוניסט, הרי שהיה חסיד הגבלת היוזמה הפרטית.
לכן אם המושל חסיד השיכון הציבורי, הרי שהוא קומוניסט.

ארגומנט זה מסומל כך:

$$S \supset H$$
$$C \supset H$$
$$\therefore S \supset C$$

ובאפשרותנו להוכיח את אי־תקפותו בלי שיהא עלינו לבנות לוח אמת שלם. ראשית אנו שואלים: איזו קביעה של ערכי אמת נחוצה כדי לעשות שהמסקנה תהא שקרית? ברור כי טענת־תנאי הינה שקרית רק כאשר הרישא שלה אמיתית והסיפא שלה שקרית. לכן, קביעת ערך אמת "אמיתי" ל־S ו"שקרי" ל־C יעשה את המסקנה $S \supset C$ לשקרית. ועתה, אם ערך האמת "אמיתי" נקבע ל־H, שתי ההקדמות נעשות אמיתיות, משום שטענת־תנאי הינה אמיתית תמיד כאשר הסיפא שלה אמיתית. נוכל לומר איפוא, שאם ערך האמת "אמיתי" נקבע ל־S ול־H, וערך האמת "שקרי" נקבע ל־C, יהיו לארגומנט הקדמות אמיתיות ומסקנה שקרית ובכך מוכחת אי־תקפותו.

דרך זו של הוכחת אי־תקפותו היא תחליף לדרך ההוכחה בעזרת לוח אמת. מכל מקום, שתי הדרכים קרובות זו לזו, ויש להכיר בקשר המהותי שביניהן. למעשה, מה שעשינו בקבענו כנאמר לעיל את ערכי האמת, היה לבנות שורה אחת של לוח האמת לארגומנט הנתון. אפשר שהקשר יראה ביתר בהירות כאשר קביעת ערכי האמת תיכתב בצורה אופקית, כגון

S	H	C	$S \supset H$	$C \supset H$	$S \supset C$
אמיתי	אמיתי	שקרי	אמיתי	אמיתי	שקרי

ובצורה זו הם מהווים שורה אחת בלוח האמת לארגומנט הנתון. ארגומנט מוכח כלא־תקף אם ישנה לפחות שורה אחת בלוח־האמת שלו, שבה כל ההקדמות שלו אמיתיות אולם מסקנתו שקרית. לפיכך איננו צריכים לבדוק את כל שורות לוח האמת של ארגומנט כדי לגלות אי־תקפותו של אותו ארגומנט: די בגילוי שורה אחת ויחידה שבה הקדמותיו אמיתיות כולן ואילו מסקנתו שקרית. הדרך הנוכחית להוכחת אי־תקפות היא דרך של בניית שורה כזאת בלי שיהא עלינו לבנות את לוח האמת כולו.

הדרך הנוכחית קצרה מאשר כתיבת לוח האמת, ושיעור הזמן והעמל הנחסכים גדול יותר יחסית לארגומנטים המכילים מספר גדול יותר של רכיבים פשוטים. לארגומנטים בעלי מספר ניכר של הקדמות, או בעלי הקדמות שסיבוכן רב, אפשר שהקביעה הנדרשת של ערכי אמת לא תהא