אינפי 4 – תרגול 3

נניח ויש לנו צינור במישור המתואר ע"י הגרף C. כמו כן, נתונה לנו פונקציה על המישור $f(x,y)$ המקבלת וקטור במישור ומחזירה לנו את הצפיפות(הנמדדת ביחידות של יחידת מסה ליחידת אורך) של נוזל העובר בצינור באותה נקודה. נרצה לדעת מהי המסה של הנוזל לאורך הצינור. אנו כבר יודעים כי

$$\Delta s \simeq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t$$

לכן, אם C נתון ע"י הפרמטריזציה $(a \le t \le b)$ $x(t), \mathrm{y}(t)$ נגדיר

$$\int_C f(x,y)ds = \int_a^b f\left(x(t), y(t)\right)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

דוגמא: חשב את שטח החלק של מעטפת הגליל $x^2+y^2=1$ שמעל מישור xy ומתחת לגליל ההיפרבולי $z=1-x^2$.

פתרון: נסמן ב C את המעגל $x^2+y^2=1$ שבמישור xy , ונציג אותו באמצעות הפונקציה הוקטורית $(0 \le t \le 2\pi)$ $r(t) = \cos t i + \sin t j$. מכאן שהשטח המבוקש הוא

$$A = \int_C \left(1-x^2\right)ds = \int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2 t\right)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin^2 dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt = \pi$$

נגדיר עוד שני סוגים של אינטגרלים על מסילות:

1. $$\int_C f(x,y)\,dx = \int_a^b f\left(x(t), y(t)\right)x'(t)\,dt$$
2. $$\int_C f(x,y)\,dy = \int_a^b f\left(x(t), y(t)\right)y'(t)\,dt$$

ניתן גם לכתוב

$$\int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int_C f(x,y)\,dx + \int_C g(x,y)\,dy$$

$\alpha(x,y)=f(x,y)dx+g(x,y)dy$ נקראת תבנית דפרנציאלית. α תקרא **מדוייקת** אם קיימת פונקציה h גזירה ברציפות כך ש $\nabla h(x,y)=\left(f(x,y),g(x,y)\right)$. (α היא בעצם הדיפרנציאל של h). התבנית תקרא **סגורה** אם $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}$. שימו לב שאם התבנית מוגדרת על תחום פשוט קשר ב $\mathbb{R}^2$ אז תבנית מדוייקת היא בהכרח סגורה.

דוגמא: חשבו את האינטגרל $\int_C 2xydx+\left(x^2+y^2\right)dy$ כאשר C היא הקשת המעגלית $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$ $x=\cos t,y=\sin t$.

פתרון:

$$\int_C 2xydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos t\sin t\right)\left[\frac{d}{dt}\cos t\right]dt=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos tdt=-\frac{2}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{3}$$

$$\int_C\left(x^2+y^2\right)dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)\left[\frac{d}{dt}\sin t\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos tdt=1$$

מכאן ש $\int_C 2xydx+\left(x^2+y^2\right)dy=\frac{1}{3}$

הערה: באותו אופן שהגדרנו אינטגרל על עקומה במישור נוכל להגדיר אינטגרל על עקומה במרחב ע"י

$$.\int_C f(x,y,z)ds=\int_a^b f\left(x(t),y(t),z(t)\right)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}dt$$

הערה: עד כה עסקנו רק באינטגרלים קווים לאורך עקומות חלקות. אולם ניתן להרחיב את המושג אינטגרל קווי גם לעקומות הנוצרות ממספר סופי של עקומות חלקות עוקבות $C_1,C_2,...,C_n$ המחוברות זו אל זו ראש אל זנב. לעקומה כזו נקרא עקומה חלקה למקוטעין. אנו מגדירים אינטגרל קווי לאורך עקומה חלקה C בקטעים כסכום האינטגרלים לאורך חלקיה:

דוגמא: חשב את $\int_C x^2ydx+xdy$ לאורך המסלול בצורת המשולש שקודקודיו הם $A(1,0),B(1,2),O(0,0)$ בכיוון $A\xrightarrow{C_2}B\xrightarrow{C_3}O\xrightarrow{C_1}A$.

פתרון: נחשב את האינטגרל לאורך כל אחת מהעקומות C_1,C_2 ו C_3 בנפרד, ונסכם את התוצאות המתקבלות. נמצא פרמטריזציות מתאימות:

$$C_1 : r(t) = (1-t)(0,0) + t(1,0) = (t,0)$$
$$C_2 : r(t) = (1-t)(1,0) + t(1,2) = (1,2t)$$
$$C_3 : r(t) = (1-t)(1,2) + t(0,0) = (1-t,2-2t)$$

כאשר בכל אחת מהן t משתנה מ 0 ל 1 . מכאן מקבלים:

$$\int_{C_1} x^2 ydx + xdy = \int_0^1 (t^2)(0)(t)'\mathrm{dt} + \int_0^1 (t)(0)'\mathrm{dt} = 0$$

$$\int_{C_2} x^2 ydx + xdy = \int_0^1 (1^2)(2t)(1)'\mathrm{dt} + \int_0^1 (1)(2t)'\mathrm{dt} = 0 + 2 = 0$$

$$\int_{C_3} x^2 ydx + xdy = \int_0^1 (1-t)^2 (2-2t)(1-t)'\mathrm{dt} + \int_0^1 (1-t)(2-2t)'\mathrm{dt}$$

$$= -2\int_0^1 (t-1)^3 \mathrm{dt} + 2\int_0^1 (t-1)\mathrm{dt} = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

לכן $\int_C x^2dx + xdy = 0 + 2 + \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

הערה: האינטגרל על עקומה אינו תלוי בפרמטריזציה של העקום עד כדי כיוון.